

Das Magnetfeld des Merkur: Über den Einfluss der Magnetosphäre auf den Dynamo im Planeteninneren

Von der Fakultät für Elektrotechnik, Informationstechnik, Physik
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr.rer.nat.)
genehmigte
Dissertation

von Daniel Heyner
aus Wolfsburg

1. Referentin oder Referent: Prof. Dr. Karl-Heinz Glaßmeier

2. Referentin oder Referent: Priv.-Doz. Dr. Dieter Schmitt

eingereicht am: 23.07.2013

mündliche Prüfung (Disputation) am: 16.10.2013

(2013)

Veröffentlichungen

Teilergebnisse aus dieser Arbeit wurden mit Genehmigung der Fakultät für Elektrotechnik, Informationstechnik, Physik, vertreten durch den Mentor der Arbeit, in folgenden Beiträgen vorab veröffentlicht:

Publikationen

Heyner, D., Schmitt, D., Wicht, J., Glassmeier, K.-H., Korth, H., Motschmann, U., 2010, The initial temporal evolution of a feedback dynamo for Mercury, *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 104, 419–429

Heyner, D., Schmitt, D., Glassmeier, K.-H., Wicht, J., 2011a, Dynamo action in an ambient field, *Astronomische Nachrichten*, 332, 36–42

Heyner, D., Wicht, J., Gomez-Perez, N., Schmitt, D., Auster, H. U., Glassmeier, K. H., 2011b, Evidence from Numerical Experiments for a Feedback Dynamo Generating Mercury's Magnetic Field, *Science*, 334, 1690–1693

Heyner, D., Glassmeier, K.-H., Schmitt, D., 2012, Stellar Wind Influence on Planetary Dynamos, *The Astrophysical Journal*, 750, 133

Tagungsbeiträge

Heyner, D., Concerning the Temporal Evolution of Mercury's Feedback Dynamo, (Poster), COSPAR-Tagung, Montreal, Kanada, 2008

Heyner, D., Gomez-Perez, N., A Hermean Feedback Dynamo, (Vortrag), 3rd MESSENGER-Flyby, Laurel, USA, 2009

Heyner, D., Glassmeier, K.-H., Schmitt, D., Feedbackdynamo des Merkur, (Vortrag), DPG Frühjahrstagung, Greifswald, 2009

Heyner, D., A Hermean Feedback Dynamo, (Vortrag), EGU, Wien, 2009

Heyner, D., J. Mueller, N. Gomez-Perez, J. Wicht, D. Schmitt, K.-H. Glassmeier, Magnetospheric Feedback on the Dynamo of Mercury, (Poster), AGU-Jahrestagung, San Francisco, USA, 2009

Heyner, D. Recent Topics About the Hermean Magnetosphere, (Vortrag), HEWG-Meeting, Mykonos, Griechenland, 2009

Heyner, D., Gomez-Perez, N., Initial Conditions, Chaotic Branching and Feedback-Stabilization in Numerical Dynamos, (Poster), SEDI-Tagung, Santa Barbara, USA, 2010

Heyner, D., Gomez-Perez, N., Initial Conditions, Chaotic Branching and Feedback-Stabilization in Numerical Dynamos, (Poster), Geodynamik Workshop, Münster, 2010

Heyner, D., Feedbackdynamo des Merkur, (Poster), DGG Jahrestagung, Köln, 2011

Heyner, D., J. Wicht, N. Gomez-Perez, D. Schmitt, H.-U. Auster und K.-H. Glassmeier, The Feedback Dynamo of Mercury, (Vortrag), EPSC, Nantes, Frankreich, 2011

Heyner, D., J. Wicht, N. Gomez-Perez, D. Schmitt, H.-U. Auster, K.-H. Glassmeier, The Feedback Dynamo of Mercury, (eingeladener Vortrag), EGU, Wien, 2012

Heyner, D., J. Wicht, N. Gomez-Perez, D. Schmitt, U. Auster, K.-H. Glassmeier, The Feedback Dynamo of Mercury, (eingeladener Vortrag), AGU-Jahrestagung, San Francisco, USA, 2012

Heyner, D., Magnetic Field Generation at Mercury, (eingeladener Vortrag), MESSENGER-BepiColombo Workshop, Chicago, USA, 2013

Heyner, D., Wird der Dynamoprozess im Planeten Merkur durch den Sonnenwind geschwächt?, (Vortrag), DGG-Jahrestagung, Leipzig, 2013

Inhaltsverzeichnis

Veröffentlichungen	3
Zusammenfassung	9
1 Einleitung	11
2 Beschreibung von Magnetfeldern und ext. Magnetfeldquellen beim Merkur	15
2.1 Interne und externe Magnetfelder	15
2.2 Externe Magnetfeldtopologien	17
2.3 Trennungsmethoden in interne und externe Anteile	19
2.4 Magnetosphärische Stromsysteme beim Merkur	22
2.4.1 Das Chapman-Ferraro Problem	24
2.4.2 Der Neutralschichtstrom	25
2.4.3 Der Ringstrom	25
2.5 Trennungsproblem bei Merkur	26
2.6 Diffusion und Filterung des externen Feldes	26
3 Modellierungsansätze des externen Feldes	29
3.1 Konzeption der magnetosphärischen Antwortfunktion	29
3.2 Planare Magnetopause	30
3.3 Ringförmiger Magnetopausenstrom	33
3.4 Kugelmagnetosphäre	36
3.5 Anpassung eines semi-empirischen, terrestrischen Modells	40
3.6 Parabolisches Modell	46
3.6.1 Das Chapman-Ferraro-Feld im parabolischen Modell	47
3.6.2 Druckbilanz am subsolaren Punkt	51
3.6.3 Antwortfunktion basierend auf dem parabolischen Magnetopau- senmodell	52
4 Hybridsimulation der Magnetosphäre	57
4.1 Motivation	57
4.2 Modellbeschreibung und Simulationskonfiguration	58
4.3 Ergebnisse einer Parameterstudie mit verschiedenen Dipolmomenten	61
4.4 Lage und Ausprägung des Neutralschichtstroms	65
4.5 Vergleich der Modell- und Simulationsergebnisse	67
4.6 Ausblick auf zukünftige Hybridsimulationsstudien	67

5	Kernentwicklung und Dynamotheorie	69
5.1	Die Induktionsgleichung als Grundlage der Dynamotheorie	69
5.2	Der Scheibendynamo	72
5.3	Planetare Dynamos	75
5.4	Evolution des Merkurkerns	76
5.5	Bifurkation und Dynamogleichgewichte	76
5.6	Mean-Field Dynamotheorie	82
5.7	Dynamo-Skalierungsgesetze	84
6	Vereinfachende Modelle zum Feedbackdynamo	89
6.1	Dynamos im externen Feld	89
6.2	Bisheriges Modell des Feedbackdynamos	93
6.3	Kinematisches Modell zum Feedbackdynamo	94
6.3.1	Mathematische Formulierung	94
6.3.2	Numerische Behandlung des kinematischen Dynamomodells . . .	98
6.3.3	Modellierungsergebnisse	99
6.4	Analytische Analyse eines kinematischen Dynamos mit einem externen Feld	103
6.4.1	Das vereinfachte Grundmodell des kinematischen Feedbackdynamos	104
6.4.2	Vereinfachter kinematischer Dynamo mit konstantem externen Feld	106
6.4.3	Vereinfachter kinematischer Dynamo mit variablem externen Feld	107
6.4.3.1	Analytische Antwortfunktion I	107
6.4.3.2	Analytische Antwortfunktion II	108
6.5	Einfluss der Lorentzkraft: Einschätzung mit einem Scheibendynamo-Modell	111
7	Dynamische Simulation des Feedbackdynamos mit einem dreidimensionalen Modell	115
7.1	Grundgleichungen	115
7.2	Randbedingungen an der Kern-Mantel-Grenze	122
7.2.1	Thermische Randbedingungen	122
7.2.2	Mechanische Randbedingungen	122
7.2.3	Übergangsbedingung des Magnetfeldes	123
7.2.4	Approximativer Größenvergleich der Internen und Externen Felder	126
7.3	Der Feedback bei schwach überkritischen Dynamos	128
7.4	Einfluss der Größe des inneren Kerns auf den Feedbackmechanismus . . .	140
8	Erweiterung des Feedbackdynamo-Modells	147
8.1	Sternentwicklungsmodell für die Sonne	147
8.2	Feedbackdynamos in der Frühzeit des Merkur	149
8.3	Falsifizierungsmöglichkeiten bei Exoplaneten	151
8.4	Auswirkungen des schwachen Magnetfeldes auf die Habitabilität eines Planeten	157

9	Magnetfeldmessdaten der Messenger-Mission	161
9.1	Der Offsetdipol des Merkur	161
9.2	Vergleich der Modelle zum Merkurdynamo mit den Messergebnissen . .	165
10	Diskussion und Ausblick	173
	Literaturverzeichnis	175
	Danksagung	185
	Curriculum Vitae	187

Zusammenfassung

Der Planet Merkur besitzt ein sehr schwaches Dipolfeld. Als Erklärung für das planetare Magnetfeld wird ein Dynamoprozess im Inneren angenommen. Nach gängigen Skalierungsgesetzen der Dynamotheorie, sollte aber das Dipolfeld an der Oberfläche um ein bis zwei Größenordnungen stärker sein. Um diesen scheinbaren Widerspruch aufzuklären, wurden verschiedene Dynamomodelle vorgeschlagen, die eine spezielle innere Struktur voraussetzen. Die den Planeten umgebende Magnetosphäre kann ebenfalls einen dämpfenden Effekt auf den Dynamoprozess ausüben. Dies stellt eine Alternative oder auch eine Erweiterung zu den anderen vorgeschlagenen Dynamomodellen dar.

In dieser Arbeit wird das Feedbackdynamomodell für den Merkur vorgestellt und diskutiert. Der Effekt des magnetosphärischen Feedbacks bedarf keiner speziellen inneren Struktur, aber eines starken Sonnenwindes wie beim Merkur. Die Wechselwirkung des Sonnenwindes mit einem merkurähnlichen Dipolfeld, wird anhand einer Reihe vereinfachter Magnetosphärenmodelle untersucht. Dazu wird das interne Dipolmoment variiert und das sich jeweils ergebende externe Feld bestimmt. Dieses Feld besteht zu einem Großteil aus dem Feld der Magnetopause. Auf Grund der Energieerhaltung ist das Magnetopausenfeld in seiner Amplitude unabhängig vom internen Feld und wird nur vom Sonnenwinddruck bestimmt. Dieser Effekt bestätigt sich in einer realistischeren Sonnenwindsimulation. Die Wechselwirkung des planetaren Dipolfeldes wird als magnetosphärische Antwortfunktion abstrahiert, um es in Dynamomodellen einfügen zu können. Dieses parameterisierte Magnetopausenfeld wird auf ein vereinfachtes kinematisches Dynamomodell angewendet und das sich ergebende System einer Stabilitätsanalyse unterzogen. Es zeigt sich, dass es einen Lösungsbereich gibt, bei dem der Dynamo durch den Feedback frühzeitig stabilisiert wird. Der Dynamo darf allerdings nicht zu stark angetrieben und das Saatfeld darf nicht zu stark sein, damit das externe Feld einen ausreichend dämpfenden Effekt haben kann. Die analytische Analyse ergibt, dass stabile, schwache Dynamos beim Anstieg der Antwortfunktion, also mit zunehmenden externen Feld existieren. Die Breite des Lösungsbereichs mit schwachen Dynamos wird von der Höhe des Maximums des Verhältnisses vom externen zum internen Magnetfeld bestimmt. Der dynamische Druck des Sonnenwindes legt die Höhe dieses Maximums fest. In der Frühzeit des Sonnensystems herrschte ein um Größenordnungen stärkerer Druck, was den Effekt des externen Feldes auf den Merkurdynamo verstärkt, wie in einer vereinfachten kinematischen Studie gezeigt wird. Mittels einer realitätsnahen Dynamosimulation können die Ergebnisse der kinematischen Modellierung für den heutigen Merkur bestätigt werden. Zusätzlich liefern diese Simulationen einen Einblick in das Konvektionssystem im flüssigen Kern und das äußere Spektrum eines planetaren Dynamos unter dem dämpfenden Einfluss der Magnetosphäre. Der Feedback unterbindet den Regimewechsel von der Geostrophie hin zur Magnetostrophie. Das äußere Magnetfeld ist durch einen schwachen Dipol dominiert,

was die Eignung des Feedbackeffektes zur Erklärung des schwachen Dipolmoments demonstriert. Das Dynamomagnetfeld weist eine Magnetfeldkonzentration in der Nähe der Polregionen auf. Dadurch werden die ungradzahligen Magnetfeldmoden betont. Das äußere Spektrum jenseits der Dipolmode wird am Ende dieser Arbeit mit den aktuellen Analyseergebnissen der MESSENGER-Mission verglichen, die ein Offsetdipolspektrum prognostizieren. Dieses gemessene Spektrum kann bisher durch keines der vorgeschlagenen Dynamomodelle, einschließlich des Feedbackdynamos, allein erklärt werden.

1 Einleitung

Als Ursache für globale Magnetfelder von terrestrischen Gesteinsplaneten wird meist ein Dynamoprozess im flüssigen, elektrisch leitfähigen Kern angenommen. Bei der Erde ist die Existenz des flüssigen Kerns heutzutage unstrittig. Beim Planeten Merkur, dem sonnennächsten Planet, war dies in der Vergangenheit kontrovers. In den 1970er Jahren wurde noch angenommen, dass der Planet Merkur kein Magnetfeld besitzt, da sein Kern schon komplett erstarrt sein sollte (z.B. Solomon 1976). Entgegen dieser Lehrmeinung bestätigten die Magnetfeldmessungen der Mariner 10-Sonde in den 1970er Jahren ein globales magnetisches Dipolfeld (Ness et al. 1974, Ness 1978). Dessen Stärke reicht sogar aus, um eine Magnetosphäre um den Planeten aufzubauen, in die der Sonnenwind nicht eindringen kann. Kürzlich konnte mittels erdgestützter Radarvermessungen der ungleichmäßigen Rotation des Merkur gezeigt werden, dass es im Merkurkern zumindest eine flüssige Schicht geben muss (Margot et al. 2007). Eine Aussage über die Dicke dieser Schicht und darüber, ob dort Konvektionsbewegungen stattfinden, konnte aber aus diesen Daten nicht gewonnen werden. Die jüngsten Magnetfelddaten der Raumsonde MESSENGER bestätigen die Existenz des globalen Magnetfeldes (Alexeev et al. 2010, Anderson et al. 2012, Johnson et al. 2012) aber mit einem etwas kleineren Dipolmoment von $190\text{nT } R_M^3$ (mit R_M als Radius des Merkur) als es sich aus der Analyse der Mariner 10-Daten ergab. Dieses Dipolmoment reicht aber aus, um eine kleine Magnetosphäre um den Planeten auszubilden. Es ist jedoch etwa ein bis zwei Größenordnungen zu schwach, um es mit konventionellen Abschätzungen zur Dipolfeldstärke (z.B. Wicht et al. 2007, Olson und Christensen 2006) erklären zu können. Um diese Diskrepanz aufzulösen, wurden mehrere spezielle Dynamomodelle entworfen (Heimpel et al. 2005, Stanley et al. 2005, Christensen 2006, Christensen und Wicht 2008, Takahashi und Matsushima 2006, Glassmeier et al. 2007). Die Mehrzahl dieser Erklärungsmodelle setzen eine spezielle innere geophysikalische Struktur von Merkur voraus, was die Allgemeingültigkeit dieser Modelle stark einschränkt. Die gängige Annahme ist, dass der Merkurdynamo unabhängig von äußeren Einflüssen operiert. Damit vernachlässigt man aber den Einfluss des magnetosphärischen Feldes auf den Dynamo. Das Feld der Magnetosphäre ist bei Merkur auf Grund seiner Nähe zur Sonne jedoch im Vergleich zum internen Dipolfeld relativ stark (Johnson et al. 2012) - selbst im Inneren an der Kern-Mantel-Grenze.

Diese Tatsache wird im Modell von Glassmeier et al. (2007) zum ersten Mal für die Merkursituation berücksichtigt. Nach diesem Modell beruht die Schwächung des Dynamos auf der Tatsache, dass das Magnetfeld der Magnetosphäre dem vom Dynamo erzeugten Magnetfeld an der Kern-Mantel-Grenze entgegengerichtet ist. Der prinzipielle Aufbau des Modells ist in Abbildung 1.1 dargestellt. Die entgegengesetzte Ausrichtung der internen und externen Felder ist die essentielle Grundlage für den sogenannten Feedbackdynamo. Mittels vereinfachender Annahmen bezüglich der Magnetosphäre und dem

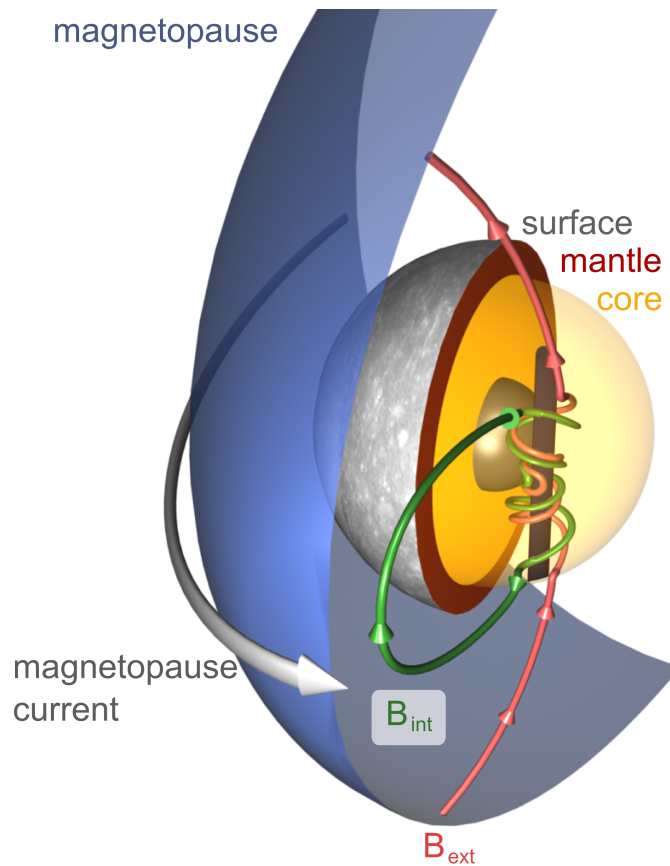


Abbildung 1.1: Funktionsschema des Feedbackdynamos. Merkur ist im Zentrum. Die Kruste (grau) umschließt einen Silikat-Mantel (rot), der bis zur Kern-Mantel-Grenze (gelbe, semi-transparente Kugel) reicht. Im Zentrum des Planeten wird ein fester Eisenkern (grau-beige) angenommen, eingebettet im flüssigen äußeren Kern mit leitfähigem Material (gelb). Der Sonnenwind strömt von unten-links an. Auf Grund der Wechselwirkung mit dem internen, planetaren Magnetfeld B_{int} (hier mit einer einzelnen Dipolfeldlinie in grün angedeutet) entsteht die Magnetopause (blauer Paraboloid), die das Magnetopausenstromsystem (angedeutet mit dem hellgrauen Pfeil) beinhaltet. Das externe Magnetfeld B_{ext} (angedeutet mit einer einzelnen Dipolfeldlinie in rot) dringt in den Mantel bis zur Kern-Mantel-Grenze vor und von dort aus in den Kern bzw. die Dynamozone ein. An dieser Grenze sind internes und externes Magnetfeld anti-parallel ausgerichtet. Diese entgegengesetzte Ausrichtung ist die Grundlage für die negative Rückkopplung des Dynamos. Abbildung aus Heyner et al. (2011b).

Dynamo konnte von Glassmeier et al. (2007) gezeigt werden, dass ein stationärer Zustand für einen schwachen Merkurdynamo existiert. Diese Studie bildet die Grundlage für diese Arbeit.

Die von Glassmeier et al. (2007) verwendeten Modelle werden erweitert, sowohl hinsichtlich der Magnetosphäre als auch für den Dynamo. Ein Ziel ist es herauszuarbeiten, unter welchen Umständen die stationären Zustände für den mit der Magnetosphäre gekoppelten Dynamo überhaupt erreicht werden können. Dazu muss das Magnetfeld der Magnetosphäre genauer charakterisiert werden, das auf langen Zeitskalen auf den Dynamo einwirkt. Zu diesem Zweck werden verschiedene Magnetosphärenmodelle, die für die terrestrische Situation entwickelt wurden, auf die Merkursituation angewendet bzw. extrapoliert. Genauere, aber auch komplexere Ergebnisse liefert eine Parameterstudie mit Hybrid-Simulationen des Sonnenwindes in Wechselwirkung mit planetaren Dipolfeldern verschiedener Stärke. Insgesamt zeigt sich, welche Parameter aus der Sicht der Magnetosphärenphysik für die Realisierbarkeit des Feedbackdynamos entscheidend sind.

Im nächsten Schritt wird untersucht, wie verschiedene Dynamomodelle, die sich in ihrer Komplexität stark unterscheiden, auf das langzeitgemittelte Feld der Magnetosphäre reagieren. Diese Modellierungen bereiten die Basis für das Vorgehen bei selbstkonsistenten, realitätsnahen Dynamosimulation, die Einblicke in den planetaren Dynamoprozess liefern. Mit dieser selbstkonsistenten Dynamosimulation kann ein für den Feedbackdynamo möglicherweise charakteristisches Magnetfeldspektrum angegeben werden, das mit den Magnetfeldmessungen verglichen werden kann.

Bei den Dynamosimulationen stellt sich heraus, dass nicht nur die heutige Situation von Interesse ist, sondern auch besonders die Zeit nach der Entstehung des Sonnensystems, zu der ein wesentlich stärkerer Sonnenwind herrschte. Das externe Feld, das der Dynamo erfährt, hängt unter anderem vom dynamischen Druck des stellaren Windes ab. Das rückt die stetig wachsende Zahl von bekannten Exoplaneten in das mögliche Anwendungsgebiet für die Feedbackdynamotheorie. Hierbei muss berücksichtigt werden, dass die Exoplaneten zum Teil um relativ junge Sterne (im Vergleich zu unserer Sonne) ihre Bahn ziehen. Das hat zur Folge, dass die Planeten einem wesentlich stärkeren stellaren Wind ausgesetzt sind als der Merkur zu heutiger Zeit.

Die aktuellen Analyseergebnisse der MESSENGER-Mission werden am Ende dieser Arbeit hinsichtlich des internen Magnetfeldspektrums begutachtet und mit den Voraussagen der Dynamomodelle einschließlich des Feedbackmodells verglichen.

Das Thema des Feedbackdynamos ist sehr facettenreich, da es unterschiedlichste Bereiche der Geo-/Astrophysik berührt, wie der Dynamotheorie, planetare Kernentwicklung, Sonnenwind-Planeten Wechselwirkung bis hin zu Fragen der Entwicklung der stellaren Winde.

2 Globale Beschreibung von planetaren Magnetfeldern und externe Magnetfeldquellen beim Merkur

2.1 Interne und externe Magnetfelder

Für die Analyse von globalen, geophysikalischen Magnetfelddaten wird für die Darstellung eine Multipolentwicklung angewendet. Im weiteren Verlauf der Arbeit sind die Begriffe internes und externes Magnetfeld von entscheidender Bedeutung. Daher wird an dieser Stelle die Multipoldarstellung des Magnetfeldes definiert. Vorweg sei hier noch erwähnt, dass in dieser Arbeit, wie in der Geophysik üblich, die magnetische Flussdichte \underline{B} mit *Magnetfeld* bezeichnet wird und nicht wie sonst in der Physik \underline{H} .

Für das Magnetfeld \underline{B} gilt das Helmholtztheorem

$$\underline{B} = -\underline{\nabla}\Psi + \underline{\nabla} \times \underline{A} \quad (2.1)$$

mit dem skalaren Potential Ψ und dem Vektorpotential \underline{A} . In stromfreien Gebieten, also mit wirbelfreiem Magnetfeld

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} = 0 \quad , \quad (2.2)$$

lässt sich das Magnetfeld durch das skalare Potential darstellen - also gemäß

$$\underline{B} = -\underline{\nabla}\Psi \quad , \quad (2.3)$$

denn es gilt stets

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} = \underline{\nabla} \times (-\underline{\nabla}\Psi) \equiv 0 \quad . \quad (2.4)$$

In Gl. (2.2), dem Ampèreschen Gesetz, wurde der Verschiebungsstrom $\mu_0 \epsilon_0 \partial_t \underline{E} = c_0^{-2} \partial_t \underline{E}$ vernachlässigt, da in der Magnetohydrodynamik (MHD) nur Geschwindigkeiten betrachtet werden, die sehr viel kleiner sind als die Lichtgeschwindigkeit. Diese Näherung ist in der englischen Literatur als *Pre-Maxwell approximation* geläufig. Eine Darstellung mit lediglich einem Vektorpotential wäre hier auch möglich, ist aber etwas komplexer, da es sich um einen Vektorfeld und nicht um eine skalare Funktion handelt. Das skalare Potential muss eine Laplace-Gleichung

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0 = \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}\Psi = \Delta\Psi \quad (2.5)$$

erfüllen. Wegen der sphärischen Geometrie der Planeten, historisch speziell natürlich wegen der in erster Näherung kugelförmigen Erde, stellt man das Potential in Kugelkoordinaten dar. Dabei bezeichnen hier r, θ und φ den Radius, den Polwinkel und den Azimuthwinkel. Die harmonischen Funktionen für den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten sind gerade die Kugelflächenfunktionen. Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung ist in zwei Teile mit unterschiedlicher Radialfunktion aufgespalten

$$\Psi = \Psi_{\text{int}}(1/r) + \Psi_{\text{ext}}(r) \quad (2.6)$$

wobei $\Psi_{\text{int}}(1/r)$ die inneren Quellen (das Magnetfeld sinkt mit größerem radialen Abstand) und $\Psi_{\text{ext}}(r)$ die äußeren Quellen (das Magnetfeld nimmt mit größerem radialen Abstand zu) beschreibt. Die Bezeichnung *intern* und *extern* beziehen sich also auf den Ort der Quelle bezüglich einer Referenzkugelschale, häufig die Planetenoberfläche $r = R_M$. Die Entwicklung der Potentiale nach den Kugelfunktionen lautet:

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{int}}(r, \varphi, \theta) &= \sum_{l=1}^{l_{\text{max}}} \sum_{m=0}^l R_M \left(\frac{R_M}{r} \right)^{l+1} \left(g_{l,\text{int}}^m \cos(m\varphi) + h_{l,\text{int}}^m \sin(m\varphi) \right) P_l^m(\cos \theta) \\ \Psi_{\text{ext}}(r, \varphi, \theta) &= \sum_{l=1}^{l_{\text{max}}} \sum_{m=0}^l R_M \left(\frac{r}{R_M} \right)^l \left(g_{l,\text{ext}}^m \cos(m\varphi) + h_{l,\text{ext}}^m \sin(m\varphi) \right) P_l^m(\cos \theta) \quad . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Hierbei sind die g_l^m und h_l^m reellwertige Gaußkoeffizienten des Grades l und der Ordnung m . $P_l^m(\cos \theta)$ sind die zugeordneten Legendre-Polynome¹ (z.B. Bronstein et al. 2001). Durch die (willkürliche) Skalierung des Potentials mit R_M (allgemein der Radius der Planetenoberfläche; hier der Radius vom Merkur) besitzen die Koeffizienten die Einheit *Tesla* des Magnetfeldes B . Die $l = 0$ -Terme werden bei den Entwicklungen weggelassen, um magnetische Monopole auszuschließen, die der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes widersprechen würden. Für gewöhnlich wird die Potentialentwicklung bei einem maximalen Grad l_{max} abgeschnitten, wenn Multipole höheren Grades in ihrem Beitrag zum Magnetfeld zu vernachlässigen sind.

Die Komponenten des Magnetfeldes leiten sich dann durch Gradientenbildung ab.

$$\begin{aligned} B_r &= -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \\ B_\varphi &= -\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \\ B_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad . \end{aligned} \quad (2.8)$$

¹Wenn bei den Legendre-Polynomen kein Argument angegeben ist, soll damit das Argument $\cos \theta$ angenommen sein.

Für das interne Feld lauten sie

$$\begin{aligned} B_{r,\text{int}} &= \sum_{l=1}^{l_{\max}} \sum_{m=0}^l (l+1) \left(\frac{R_M}{r} \right)^{l+2} \left(g_{l,\text{int}}^m \cos(m\varphi) + h_{l,\text{int}}^m \sin(m\varphi) \right) P_l^m \\ B_{\varphi,\text{int}} &= \sum_{l=1}^{l_{\max}} \sum_{m=0}^l m \left(\frac{R_M}{r} \right)^{l+2} \left(g_{l,\text{int}}^m \sin(m\varphi) - h_{l,\text{int}}^m \cos(m\varphi) \right) \frac{P_l^m}{\sin \theta} \\ B_{\theta,\text{int}} &= - \sum_{l=1}^{l_{\max}} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R_M}{r} \right)^{l+2} \left(g_{l,\text{int}}^m \cos(m\varphi) + h_{l,\text{int}}^m \sin(m\varphi) \right) \frac{\partial P_l^m}{\partial \theta} . \end{aligned} \quad (2.9)$$

und für das externe Feld

$$B_{r,\text{ext}} = - \sum_{l=1}^{l_{\max}} \sum_{m=0}^l l \left(\frac{r}{R_M} \right)^{l-1} \left(g_{l,\text{ext}}^m \cos(m\varphi) + h_{l,\text{ext}}^m \sin(m\varphi) \right) P_l^m \quad (2.10)$$

$$B_{\varphi,\text{ext}} = \sum_{l=1}^{l_{\max}} \sum_{m=0}^l m \left(\frac{r}{R_M} \right)^{l-1} \left(g_{l,\text{ext}}^m \sin(m\varphi) - h_{l,\text{ext}}^m \cos(m\varphi) \right) \frac{P_l^m}{\sin \theta} \quad (2.11)$$

$$B_{\theta,\text{ext}} = - \sum_{l=1}^{l_{\max}} \sum_{m=0}^l \left(\frac{r}{R_M} \right)^{l-1} \left(g_{l,\text{ext}}^m \cos(m\varphi) + h_{l,\text{ext}}^m \sin(m\varphi) \right) \frac{\partial P_l^m}{\partial \theta} . \quad (2.12)$$

Die mittlere quadratische Feldstärke des internen Magnetfeldes des Grades l auf einer Referenzkugeloberfläche (mit Radius r) ist

$$W_{\text{int},l}(r) = (l+1) \left(\frac{R_M}{r} \right)^{2l+4} \sum_m \left(g_{l,\text{int}}^m \right)^2 + \left(h_{l,\text{int}}^m \right)^2 \quad (2.13)$$

Dieser Ausdruck ist in der Literatur als Mauersberger-Lowes-Spektrum bekannt (Mauersberger 1956, Olsen et al. 2010). Auf der Planetenoberfläche reduziert sich dieser Ausdruck auf

$$W_{\text{int},l}(R_M) = (l+1) \sum_m \left(g_{l,\text{int}}^m \right)^2 + \left(h_{l,\text{int}}^m \right)^2 . \quad (2.14)$$

Alternativ zu der Beschreibung mit einem skalaren Potential, kann das Magnetfeld auch komplett mit einem Vektorpotential dargestellt werden. Dadurch ist auch möglich, das Magnetfeld innerhalb eines stromdurchflossenen Gebietes anzugeben. Das Vektorpotential kann man weiter in einen toroidalen und einen poloidalen Anteil aufspalten:

$$\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A} = \underbrace{\underline{\nabla} \times \mathcal{T}_B \underline{e}_r}_{\text{toroidal}} + \underbrace{\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \mathcal{P}_B \underline{e}_r}_{\text{poloidal}} . \quad (2.15)$$

Dabei sind \mathcal{T}_B und \mathcal{P}_B skalare Funktionen. Dabei zeichnet sich der toroidale Anteil dadurch aus, dass er keine radiale Feldkomponente besitzt.

2.2 Externe Magnetfeldtopologien

Die Form externer Magnetfelder ist in der Literatur nur selten diskutiert worden. Um einen anschaulichen Überblick über die Struktur dieser Felder zu bekommen, werden im

Folgenden beispielhaft die Feldlinien von einigen externen, achsensymmetrischen Multipolen berechnet und graphisch dargestellt. Die Methode ist ähnlich der von Willis et al. (2000) aber in jener Arbeit gab es eine kleine Ungenauigkeit in der mathematischen Darstellung, so dass hier nochmal die Berechnung vorgestellt wird.

Ein zweidimensionales Magnetfeld

$$\underline{B} = B_r \underline{e}_r + B_\theta \underline{e}_\theta \quad , \quad (2.16)$$

das sich aus einem Potentialfeld nach

$$\underline{B} = -\underline{\nabla}\Psi \quad (2.17)$$

ableitet, kann auch durch ein Vektorpotential A mittels

$$\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A} = \underline{\nabla} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

dargestellt werden. Die Isokontur-Linien des Vektorpotentials sind die Feldlinien zu \underline{B} . Nun ist für ein externes Magnetfeld ein Potentialansatz der Art

$$\Psi = \sum_l \Psi_l = \sum_l r^l P_l^0 \quad (2.19)$$

zu wählen. Aus $-\underline{\nabla}\Psi = \underline{\nabla} \times \underline{A}$ lässt sich das Gleichungssystem

$$\partial_r(r^l P_l^0) = \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta(A \sin \theta) \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{r} \partial_\theta(r^l P_l^0) = -\frac{1}{r} \partial_r(rA) \quad (2.21)$$

aufstellen, woraus sich durch Ableitung

$$-lr^l P_l^0 = \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta(A \sin \theta) \quad (2.22)$$

$$r^l \partial_\theta P_l^0 = \partial_r(rA) \quad (2.23)$$

ergibt. Mit dem Separationsansatz $A = A_r A_\theta$ ergibt sich daraus:

$$lr^l P_l^0 = -\frac{A_r}{\sin \theta} \partial_\theta(A_\theta \sin \theta) \quad (2.24)$$

$$r^l \partial_\theta P_l^0 = A_\theta \partial_r(rA_r) \quad . \quad (2.25)$$

Aus Gleichung (2.24) folgt

$$\partial_r(rA_r) = (l+1)A_r \quad (2.26)$$

und damit ist

$$r^l \partial_\theta P_l^0 = A_\theta (l+1)A_r \quad . \quad (2.27)$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die einzelnen Komponenten des Vektorpotentials ableiten:

$$A_\theta = \partial_\theta P_l^0 \quad (2.28)$$

$$A_r = \frac{1}{l+1} r^l \quad . \quad (2.29)$$

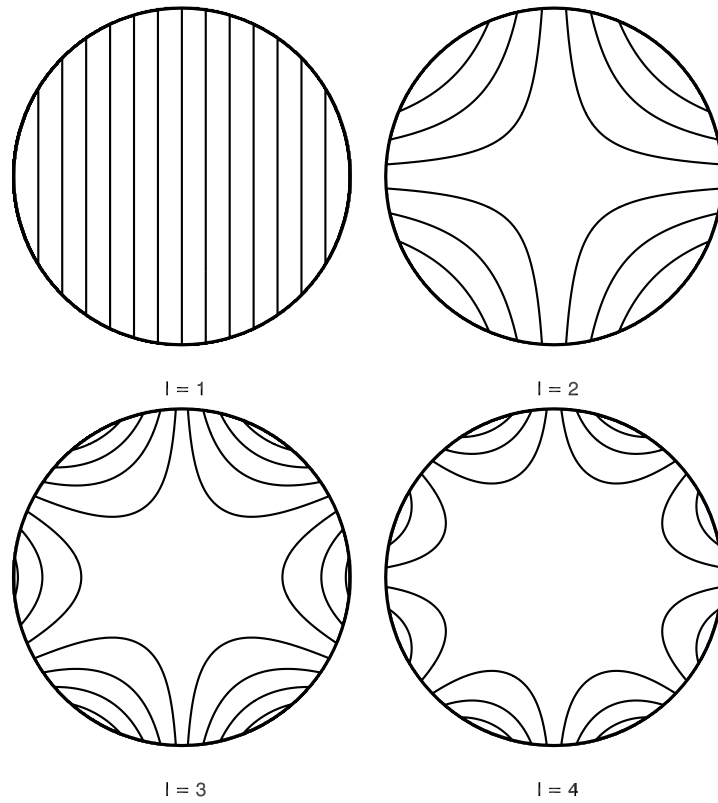


Abbildung 2.1: Feldlinienbilder der externen Multipole mit den Graden $l = 1 - 4$.

Damit ist das Vektorpotential vollständig bestimmt:

$$A = \frac{1}{l+1} r^l \partial_\theta P_l^0 . \quad (2.30)$$

Für die Darstellung sei nun angenommen, dass die Ströme, die das externe Magnetfeld erzeugen, auf einer Kugelschale mit einem Normradius lokalisiert sind. Die Feldlinien ergeben sich aus einer äquidistanten Wahl von Niveaus zwischen Minimum und Maximum des Vektorpotentials innerhalb des Gebietes der Kugelschale. In Abbildung 2.1 sind die Feldlinien der externen Multipole mit $l = 1 - 4$ dargestellt.

2.3 Trennungsmethoden in interne und externe Anteile

Zur Separation des Magnetfeldes in inneren und äußern Anteil kann man grundsätzlich zwei Methoden anwenden. Die erste Methode ist die direkte Integration der Daten unter Ausnutzung von Orthogonalitätsrelationen, wenn die Magnetfeldkomponenten hinreichend dicht auf einer Kugelschale bekannt sind wie zum Beispiel bei einer Dynamo- oder Sonnenwindsimulation. Die andere Methode basiert auf einem Optimierungsproblem (zum Beispiel einer Anpassung nach der Methode der kleinsten Quadrate) von Messwerten an eine harmonische Entwicklung. Bei dieser Methode braucht das Magnetfeld nur an irregulären Orten bekannt sein wie zum Beispiel auf einer elliptischen Satellitenbahn. Beiden Methoden gemein ist jedoch die Voraussetzung, dass sich die Messpunkte in einem lokal stromfreien Gebiet befinden.

Mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen für die trigonometrischen Funktionen und der zugeordneten Legendre-Polynome ist die Gauss-Koeffizientenbestimmung inklusive Trennung in einen inneren und einen äußeren Anteil möglich. Die Bestimmung der Gauss-Koeffizienten aus Magnetfelddaten (Analyse) ist jedoch nicht so einfach wie die umgekehrte Bestimmung des Magnetfeldes aus den Gauss-Koeffizienten (Synthese). Für die numerische Berechnung wird die Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen $\cos()$ und $\sin()$ sowie die Orthogonalität der assoziierten Legendre-Polynome ausgenutzt. An dieser Stelle wird darauf hingewiesen, dass hier folgende Definition der assoziierten Legendre-Polynome nach Ferrer-Neumann benutzt wird:

$$P_{l,m} = \sin^m(\theta) \frac{d^m P_l}{d \cos(\theta)^m} \quad . \quad (2.31)$$

Hier wird (wie in der Magnetik und Geodäsie üblich) kein Condon-Shortley Phasenfaktor¹ verwendet. Nach Bronstein et al. (2001) gilt die Orthogonalitätsrelation für die Ordnung m :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\hat{m}\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi = 0 \quad (2.32)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\hat{m}\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi = \delta_{\hat{m},m} \frac{1}{2 - \delta_{m,0}} \quad (2.33)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\hat{m}\varphi) \sin(m\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{für } \hat{m} \neq m \\ \frac{1}{2} & \text{für } \hat{m} = m > 0 \\ 0 & \text{für } \hat{m} = m = 0 \end{cases} \quad . \quad (2.34)$$

Nach Mauersberger (1961) gilt für die Schmidt-quasinormierten assoziierten Legendre-Polynome P_l^m

$$P_l^m = \sqrt{(2 - \delta_{m,0}) \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{l,m} \quad (2.35)$$

die Orthogonalitätsrelation

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi P_l^m P_{\hat{l}}^m \sin(\theta) d\theta = \delta_{l,\hat{l}} \frac{2 - \delta_{m,0}}{2l + 1} \quad . \quad (2.36)$$

Diese Gleichung gilt aber ausschließlich für übereinstimmende Ordnungen m - daher muss die Orthogonalität bezüglich der Ordnung durch den trigonometrischen Anteil der Kugelflächenfunktion hergestellt werden. Für die B_r - und die B_φ - Komponenten des Magnetfeldes ist die Rechnung relativ einfach und problemlos. Zur Trennung von internem und externem Feldanteil müssen zwei Komponenten des Magnetfeldes hinreichend dicht auf einer Kugelschale bekannt sein. Für $m \neq 0$ können B_r und B_φ verwendet werden. Die Komponente B_φ eignet sich jedoch nicht für die Bestimmung von achsensymmetrischen

¹In der verwendeten Programmierumgebung IDL wird standardmäßig der Phasenfaktor verwendet und muss daher korrigiert werden.

Gauss-Koeffizienten, da diese Komponente für $m = 0$ gerade überall verschwindet. Daher wird für die Trennung mit $m = 0$ die B_θ - und B_r -Komponente verwendet. Aus der B_r -Komponente folgen die verallgemeinerten Koeffizienten

$$\begin{aligned} G_{r,l}^m &= \frac{2l+1}{4\pi} \iint B_r \cos(m\varphi) P_l^m \sin \theta \, d\theta, \varphi \\ H_{r,l}^m &= \frac{2l+1}{4\pi} \iint B_r \sin(m\varphi) P_l^m \sin \theta \, d\theta, \varphi \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ohne weiteres jedoch lässt sich die B_θ -Komponente nicht unter Ausnutzung von Gleichung (2.36) verwenden, da in der Entwicklung von B_θ die Ableitungen der Legendre-Polynome auftreten und nicht die Polynome selbst. Die Lösung dieses Problems nach Schmidt (1895) wird in dieser Arbeit verwendet und im Folgenden vorgestellt.

Anstatt der B_θ -Komponente wird $(\sin \theta B_\theta)$ nach Kugelflächenfunktionen entwickelt.

$$\sin \theta B_\theta = \sum_{l=1}^{l_{\max}} \sum_{m=0}^l \left(G_{\theta,l}^m \cos(m\varphi) + H_{\theta,l}^m \sin(m\varphi) \right) \sin \theta \frac{dP_l^m}{d\theta} \quad (2.38)$$

$$= \sum_{l=0}^{l_{\max}+1} \sum_{m=0}^l \left(V_l^m \cos(m\varphi) + W_l^m \sin(m\varphi) \right) P_l^m \quad (2.39)$$

Aus der Gleichung (2.39) können die Koeffizienten V_l^m und W_l^m durch Integration bestimmt werden:

$$\begin{aligned} V_l^m &= \frac{2l+1}{4\pi} \iint \sin^2 \theta B_\theta \cos(m\varphi) P_l^m \, d\theta, \varphi \\ W_l^m &= \frac{2l+1}{4\pi} \iint \sin^2 \theta B_\theta \sin(m\varphi) P_l^m \, d\theta, \varphi \end{aligned}$$

Die Ableitung der Legendre-Polynome in Gleichung (2.38) lässt sich nach Kautzleben (1965) in einer Rekursionsbeziehung bezüglich des Grades l als

$$\sin \theta \frac{dP_l^m}{d\theta} = -a_{l+1}^m P_{l+1}^m - b_{l-1}^m P_{l-1}^m \quad (2.40)$$

mit $a_l^m = \frac{l(m-l-1)}{2l+1}$ und $b_l^m = \frac{(l+1)(l+m)}{2l+1}$ schreiben. Es existieren eine ganze Reihe von Rekursionen, mit denen die Ableitung der Legendre-Polynome ausgedrückt werden kann. Wichtig ist hier jedoch, dass die Legendre-Polynome nicht mit weiteren trigonometrischen Funktionen verknüpft werden, da sonst die Orthogonalitätsrelation nicht mehr in der Form von Gl. 2.36 verwendet werden kann. Damit können für vorgegebenes m die Koeffizienten V_l^m und W_l^m mit $G_{\theta,l}^m$ und $H_{\theta,l}^m$ in Beziehung gesetzt werden:

$$\begin{aligned} V_0^0 &= -b_1^0 G_{\theta,1}^0 \\ V_1^0 &= -b_2^0 G_{\theta,2}^0 \\ V_2^0 &= -a_1^0 G_{\theta,1}^0 - b_3^0 G_{\theta,3}^0 \\ V_3^0 &= -a_2^0 G_{\theta,2}^0 - b_4^0 G_{\theta,4}^0 \\ V_4^0 &= -a_3^0 G_{\theta,3}^0 - b_5^0 G_{\theta,5}^0 \\ &\vdots = \vdots \end{aligned} \quad (2.41)$$

Hieraus können sukzessive die G -Koeffizienten bestimmt werden:

$$G_{\theta,l}^0 = -\frac{V_{l-1}^0 - \frac{a_{l-2}^0}{b_{l-2}^0} V_{l-3}^0}{b_l^0} \quad . \quad (2.42)$$

Die eigentlichen Gausskoeffizienten lassen sich über

$$\begin{aligned} G_{\theta,l}^0 &= -\left(\frac{R_M}{r}\right)^{l+2} g_{l,\text{int}}^0 - \left(\frac{r}{R_M}\right)^{l-1} g_{l,\text{ext}}^0 \\ G_{r,l}^0 &= (l+1)\left(\frac{R_M}{r}\right)^{l+2} g_{l,\text{int}}^0 - l\left(\frac{r}{R_M}\right)^{l-1} g_{l,\text{ext}}^0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

mit Umformung zu

$$\begin{aligned} g_{l,\text{int}}^0 &= \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r}{R_M}\right)^{l+2} (G_{r,l}^0 - lG_{\theta,l}^0) \\ g_{l,\text{ext}}^0 &= -\frac{1}{2l+1} \left(\frac{R_M}{r}\right)^{l-1} (G_{r,l}^0 + (l+1)G_{\theta,l}^0) \end{aligned} \quad (2.44)$$

berechnen. Für $m \neq 0$ müssen die verallgemeinerten Gausskoeffizienten aus der $B_\varphi \sin \theta$ -Komponente

$$\begin{aligned} G_{\varphi,l}^m &= \frac{2l+1}{4\pi} \iint (B_\varphi \sin \theta) \sin(m\varphi) P_l^m \sin \theta \, d\theta, \varphi \\ H_{\varphi,l}^m &= \frac{2l+1}{4\pi} \iint (B_\varphi \sin \theta) \cos(m\varphi) P_l^m \sin \theta \, d\theta, \varphi \end{aligned} \quad (2.45)$$

bestimmt werden. Die Gauss-Koeffizienten sind dann durch

$$\begin{aligned} g_{l,\text{int}}^m &= \frac{lG_{\varphi,l}^m + mG_{r,l}^m}{(2l+1)m} \left(\frac{r}{R_M}\right)^{l+2} \\ g_{l,\text{ext}}^m &= \frac{(l+1)G_{\varphi,l}^m - mG_{r,l}^m}{(2l+1)m} \left(\frac{r}{R_M}\right)^{-l+1} \end{aligned} \quad (2.46)$$

definiert.

2.4 Magnetosphärische Stromsysteme beim Merkur

Die Merkurmagnetosphäre unterscheidet sich von der Erdmagnetosphäre in mehreren Aspekten. Der Merkur hat ein wesentlich schwächeres internes Dipolmoment und ist auf Grund seiner Nähe zur Sonne einem stärkeren Sonnenwind ausgesetzt. Beides führt dazu, dass die Merkurmagnetosphäre wesentlich kleiner ist als die terrestrische. Auf Grund ihrer geringen Größe kann sich die Merkurmagnetosphäre auch wesentlich schneller rekonfigurieren und damit auf Schwankungen des Sonnenwinds reagieren (Slavin et al. 2012). In Folge dessen ist die Merkurmagnetosphäre sehr dynamisch. Weiterhin besitzt Merkur

keine Atmosphäre, so dass sich keine Ionosphäre ausbilden kann. Also bildet sich auch kein ionosphärisches Stromsystem aus. Die Form und die Dynamik der Magnetosphäre ist durch die in ihr fließenden Ströme bestimmt. In dieser Arbeit sind besonders die großskaligen und langzeitstabilen Magnetfeldstrukturen von Interesse. Daher wird hier nur auf die wesentlichen, makroskopischen Stromsysteme eingegangen.

Ein Überblick über die Magnetosphäre und deren Stromsysteme ist zum Beispiel in Baumjohann et al. (2010) zu finden. Die wesentlichen magnetosphärischen Stromsysteme der Erdmagnetosphäre sind in Abbildung 2.2 gezeigt. Der Magnetopausestrom ist ein

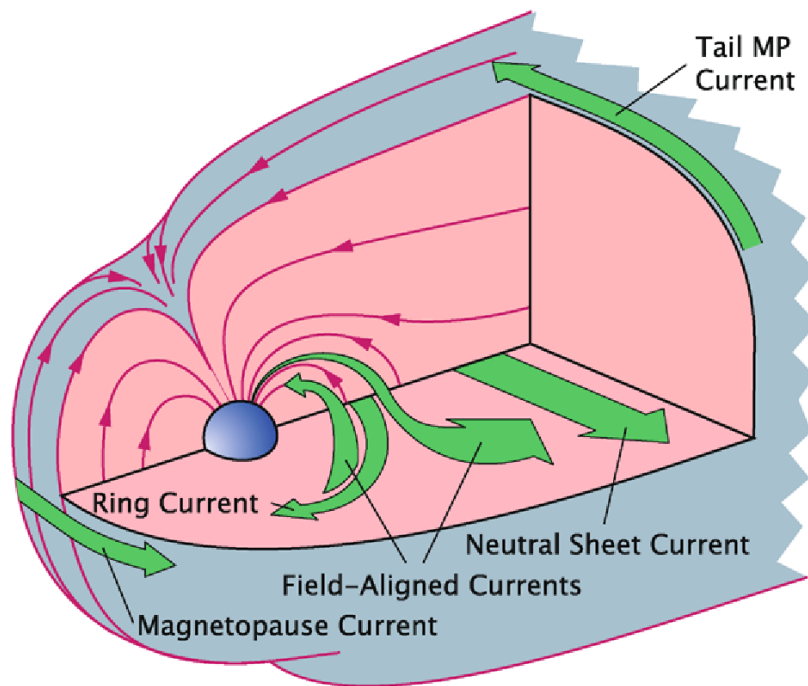


Abbildung 2.2: Stromsysteme in der Magnetosphäre. Der Sonnenwind kommt von unten links. Die Magnetopause ist als graue Fläche dargestellt, aus der für eine bessere Einsicht in die Magnetosphäre ein Viertel herausgeschnitten ist (die Schnittflächen sind rosa). Die Magnetfeldlinien sind in pink dargestellt. Die einzelnen Stromsysteme sind mit grünen Pfeilen angedeutet. Abbildung aus Baumjohann et al. (2010).

diamagnetischer Strom, der die Magnetosphäre begrenzt. Auf der Tagseite vom Planeten fließt dieser Strom eher azimuthal und auf der Nachtseite gliedert er sich in ein Θ -förmiges Stromsystem (vom Planeten aus in die Nachtrichtung gesehen) bestehend aus Schweifstrom (außen) und Neutralschichtstrom (innen, im Bereich des magnetischen Äquators) ein. Die Schweif- und Neutralschichtströme sind die Ursache für das langgezogene Magnetfeld zur Nachtrichtung hin. Dieses Magnetopause- und Neutralschichtstromsystem ist in der Summe geschlossen und damit divergenzfrei. Ein weiterer geschlossener Strom um den Planeten herum ist der Ringstrom. Er wird durch eingeschlossene, geladene Teilchen erzeugt und ist auf der Nachtseite parallel zum Neutralschichtstrom und auf der Tagseite antiparallel zum Magnetopausestrom. Die feldparallelen Ströme sind zunächst nicht geschlossen. Weitere Stromsysteme in der Ionosphäre quer zum Magnetfeld sind zur Schließung der feldparallelen Ströme notwendig. Beim Merkur fehlt die Ionosphäre

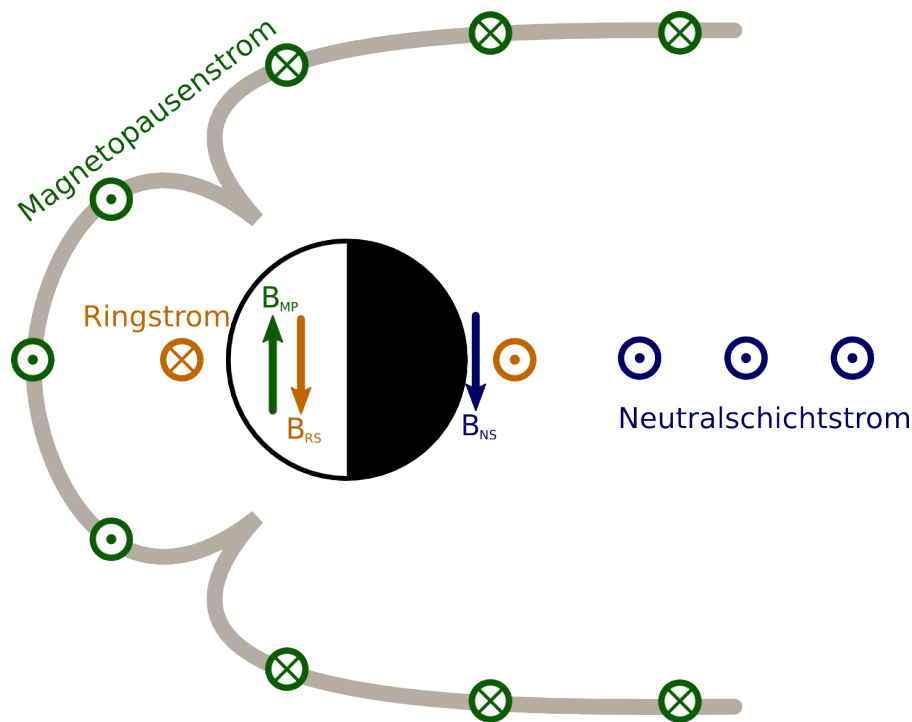


Abbildung 2.3: Schema der magnetosphärischen Stromsysteme in einem meridionalen Schnitt durch die Magnetosphäre. Die Ausrichtung der hervorgerufenen Magnetfelder ist durch die Pfeile bei der Planetenoberfläche dargestellt.

und die feldparallelen Ströme müssen daher auf andere Weise geschlossen werden. Es ist bisher nicht klar, wo dies beim Merkur geschieht. Die Auswirkungen der feldparallelen Ströme auf das Langzeitmittel des externen Magnetfeldes werden in dieser Arbeit vernachlässigt. Die Ausrichtung der für den Feedbackdynamo wichtigen externen Felder ist in Abbildung 2.3 gezeigt.

2.4.1 Das Chapman-Ferraro Problem

Das interplanetare Medium ist sehr gut leitfähig (stark verdünntes Plasma), daher kann das planetare Magnetfeld nicht in den interplanetaren Raum eindringen. Die Grenzfläche zwischen Magnetosphäre und interplanetarem Raum bezeichnet man als Magnetopause. Um diese magnetische Trennung mathematisch in einem Modell herzustellen, muss der magnetische Gesamtfluss durch diese Fläche verschwinden - die Magnetopause stellt also eine sog. magnetische Feldfläche dar. Um die Magnetopause zu beschreiben, muss die konkrete Lage und Form der Magnetopause sowie das innere Stromsystem bestimmt werden. Dazu muss simultan die Kräftebilanz an der Magnetopause und der magnetische Fluss als Funktion der Form, Lage und inneren Stromverteilung ausgeglichen werden. Dieses Optimierungsproblem bezeichnet man als Chapman-Ferraro-Problem (zum Beispiel Baumjohann und Treumann 1996). Im Allgemeinen werden zwei Ansätze zur Lösung dieses Problems verfolgt. Entweder wird die Magnetosphäre selbstkonsistent unter z.T. hohem numerischen Aufwand simuliert oder es wird die Form der Magnetopause vorgegeben und über die Anpassung der Stromverteilung die magnetische Kompensation

hergestellt.

2.4.2 Der Neutralschichtstrom

Die Neutralschicht befindet sich auf der Nachtseite auf der Höhe des magnetischen Äquators. Sie zeichnet sich durch eine magnetische Scherung zwischen dem nördlichen und südlichen *Lobe* aus. Den Neutralschichtstrom kann man mit einer Driftbewegung der geladenen Teilchen erklären. Die Teilchen in der Neutralschicht bewegen sich in der verscherten Magnetfeldkonfiguration wellenförmig durch eine Neutralflächendrift je nach Ladung in unterschiedlichen Richtungen (Prölss 2003). Ein anderer Erklärungsansatz ist, dass sich die Teilchen auf Grund einer diamagnetischen Drift entlang der Neutralschicht einen Strom erzeugen (Baumjohann et al. 2010). Insgesamt ergibt sich ein elektrischer Strom, der die *Lobe*-Konfiguration stabil hält. Das Magnetfeld dieses Neutralschichtstroms ist dem Magnetopausenfeld bei der Planetenoberfläche entgegengerichtet wie Abbildung 2.3 zeigt.

2.4.3 Der Ringstrom

Der Ringstrom, bestehend aus eingefangenen Teilchen, die auf Grund der Summe einer Krümmungs-, einer Gradienten- und einer diamagnetischen Drift um den Planeten laufen, ruft ein Magnetfeld auf der Planetenoberfläche hervor, das dem Magnetfeld der Magnetopausenströme entgegengesetzt ist (s. Abbildung 2.3). Damit wird das externe Magnetfeld geschwächt und seine Wirkung auf den Dynamo herabgesetzt.

Bei einer kleinen Magnetosphäre wie der beim Merkur stellt sich aber die Frage, ob überhaupt ein Ringstrom entstehen kann. Nimmt man an, dass die Maßen der Magnetosphäre mit dem magnetischen Moment skalieren, dann gilt für das Verhältnis der Ringstromabstände zum Planetenzentrum:

$$\frac{R_{rc,E}}{R_{rc,M}} = \frac{30000 \text{ nTR}_E^3}{190 \text{ nTR}_M^3} . \quad (2.47)$$

Bei der Erde fließt der Ringstrom hauptsächlich in einer äquatorialen Entfernung von 4 Erdradien (Prölss 2003). Damit ergibt sich für den Merkur ein Abstand von etwa 820 km, was deutlich unrerhalb der Planetenoberfläche liegt. Aber ist es vielleicht auch möglich, dass der Ringstrom nur teilweise zu Stande kommt? Eventuell eingefangene Partikel folgen mit ihrer Drift den Isokonturlinien von $|B|$. Diese Linien schließen sich bei Merkur aber nicht auf der Tagseite und die eingefangenen Partikel werden in der Magnetopause absorbiert (s. Abbildung 2.4). Damit kann sich in heutiger Zeit kein stabiler Ringstrom beim Merkur ausbilden.

Da in dieser Arbeit aber im Gegensatz zu anderen magnetosphärischen Forschungen das interne Feld nicht als konstant angenommen werden kann, müsste in Zukunft untersucht werden, ab welcher internen Dipolstärke sich ein vollständiger Ringstrom ausbilden kann. Dies könnte für die Anwendung des Feedbackdynamomodells auf Exoplaneten oder den jungen (s. Kapitel 8) Merkur wichtig werden.

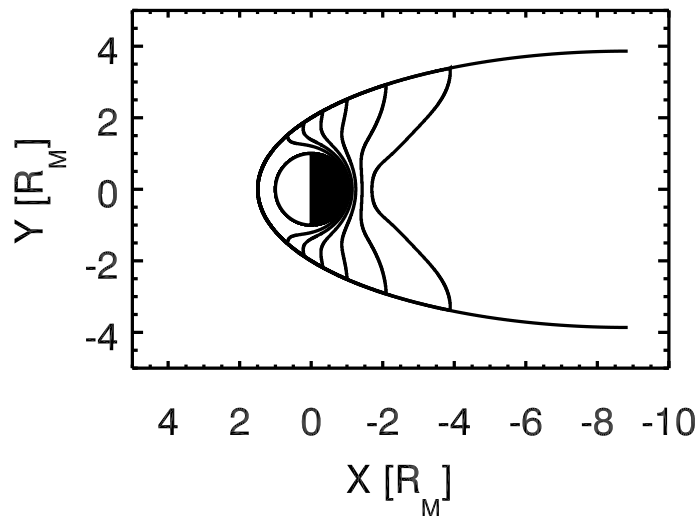


Abbildung 2.4: Konturlinien der Magnetfeldstärke in einem äquatorialen Schnitt durch die Modellmagnetosphäre. Das Magnetfeld wurde nach dem Modell von Tsyganenko (1995) berechnet und auf die Merkurbedingungen ($p_{sw} = 13.4 \text{ nPa}$, $g_{1,int}^0 = 190 \text{ nT}$ und $B_{IMF} = 0$) skaliert. Abbildung nach Baumjohann et al. (2010).

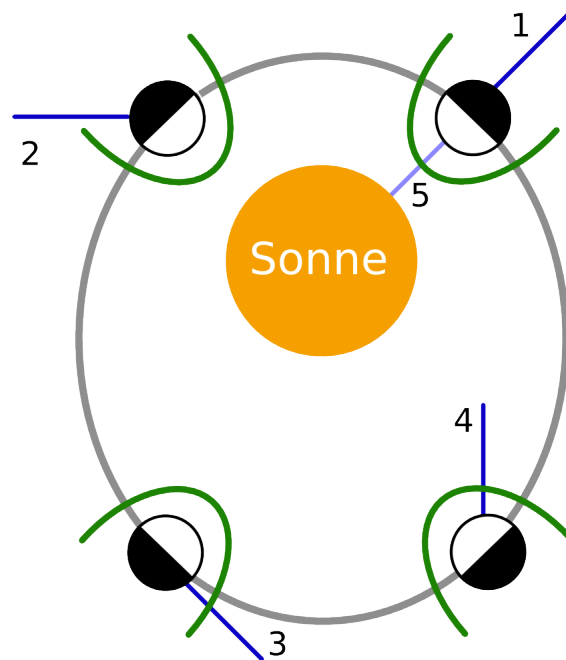
2.5 Trennungsproblem bei Merkur

Im Kapitel 2.1 wurde die Annahme gemacht, dass das Gebiet, in dem das Magnetfeld des Planeten analysiert wird, stromfrei ist. Dies ist bei einer kleinen Magnetosphäre wie bei Merkur nicht überall gegeben. Stationäre Stromsysteme wie der Neutralschichtstrom, der partielle Ringstrom und die Magnetopausenströme können dazu führen, dass die Annahme der lokalen Wirbelfreiheit des Magnetfeldes nicht mehr uneingeschränkt gilt. Dazu können kurzzeitige feldparallele Ströme die Analyse stören. Die Auswirkungen einer radial ausgebreiteten Stromschicht der Magnetopause auf eine harmonische Analyse des Magnetfeldes wurde schon in Heyner (2007) beleuchtet. Mathematisch gesehen liefert die harmonische Analyse ein Modell zur Beschreibung der gemessenen Felder, jedoch wird die physikalische Interpretation der ermittelten Gaußkoeffizienten durch die Verletzung der Stromfreiheit fehlgeleitet. Grob gesagt wurde in der besagten Studie der Fehler bei der Dipolbestimmung in der Größenordnung von 10% abgeschätzt. Mit einem fortschrittlicheren Modell der Magnetosphäre und den Stromsystemen sollte dieser Aspekt in Zukunft weiter untersucht und auch auf höhere Magnetfeldmomente ausgedehnt werden.

2.6 Diffusion und Filterung des externen Feldes

Da die Zeitskalen des Dynamoprozesses beim Merkur weitaus länger sind (mehr als 10000 Jahre) als die magnetosphärischen Prozesse (im Bereich von Minuten), muss für den Feedbackdynamo das Langzeitmittel des externen Feldes abgeschätzt werden. Eine typische Variationszeitskala für einen Dynamo ist die magnetische Diffusionszeit $\tau_\eta \approx 35000 \text{ a}$ (s. Gleichung (5.12)). In dieser Zeitspanne variiert das externe Feld der Magnetopause relativ stark. Zum einen richtet sich die Magnetosphäre ständig neu aus, während sich der Merkur um die Sonne bewegt. Dies ist in Abbildung 2.5 schematisch dargestellt.

Für einen Beobachter auf der Merkur Oberfläche rotiert die Magnetopause um das Planetenzentrum während eines Umlaufs um die Sonne und erzeugt eine azimuthale Schwingung des externen Feldes. Zusätzlich dazu variiert das externe Feld im Ruhesystem des Merkur auf Grund der planetaren Rotation. Diese Rotation ist nicht komplett gebunden, sondern es besteht eine Spin-Orbit-Resonanz von 3:2. Damit rotiert das externe Feld noch zusätzlich azimuthal. Als Konsequenz dieser beiden Variationen wird das Langzeitmittel



⌋ Magnetopause

◐ Merkur

Abbildung 2.5: Schematische Darstellung von Merkurs Rotation und seinem Orbit um die Sonne. Der Merkur besitzt eine Spin-Orbit-Resonanz von 3:2. Entlang des Orbits rotiert die Magnetopause (grün) je nach Ausrichtung zur Sonne. Für einen Umlauf wurde ein Beobachter auf der Oberfläche des Planeten markiert (blaue Linie).

des externen Feldes $\langle \underline{B} \rangle_{\tau_\eta}$ als azimuthales Mittel über eine planetare Rotation

$$\langle \underline{B} \rangle_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underline{B} d\varphi \quad (2.48)$$

ausgedrückt. Dies ist natürlich nur eine Näherung. Das externe Feld schwankt auch in der Stärke, da der Merkur sich auf seiner elliptischen Bahn auch der Sonne periodisch annähert und wieder entfernt und somit abwechselnd starkem und schwachem Sonnenwind ausgesetzt ist (s. Kapitel 3). Es ergibt sich durch diese Schwankung wahrscheinlich

eine Dämpfung des externen, achsensymmetrischen Anteils durch den Skin-Effekt, der in Zukunft untersucht werden sollte.

Bei der Schwankung sind auch kurzzeitige Variationen wie bei einer Passage durch Bereiche mit einem schnellen Sonnenwind oder das Auftreffen eines koronalen Massenauswurfs nicht mit einbezogen. Eine Langzeitstatistik dieser Transienten und eine detailliertere Analyse des externen Feldes sollten in Zukunft unternommen werden. Es ist nicht einfach, so eine Analyse durchzuführen, da mit Satellitenmissionen immer nur eine beschränkte Beobachtungszeit zur Verfügung steht und es nie klar ist, ob der jetzige Zustand typisch oder atypisch ist.

Da das externe Feld an der Planetenoberfläche durch ein skalares Potential (siehe Kapitel 2.1) beschreibbar ist, kann durch Vertauschen von Differentiation und Integration auch das azimutale Mittel des skalaren Potentials betrachtet werden. Die Integration über den Azimut entspricht dann

$$\langle \Psi_{\text{ext}} \rangle_{\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_{\text{ext}} \cos(m\varphi) \Big|_{m=0} d\varphi \quad . \quad (2.49)$$

Dies bedeutet anschaulich, dass sich die azimutalen Magnetfeldkomponenten gerade wegmitteln. Es verbleiben also nur die achsensymmetrischen Anteile des externen Feldes

$$\langle \underline{B} \rangle_{\varphi} = -\underline{\nabla} R_M \sum_{l=1}^{l_{\text{max}}} \left(\frac{r}{R_M} \right)^l g_{l,\text{ext}}^0 P_l^0 \quad (2.50)$$

und als erste Approximation kann die $l = 1$ -Mode, das homogene Feld, herangezogen werden.

Man kann auch die Eindringtiefe

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} \quad (2.51)$$

(z.B. Jackson 2006) der externen Felder betrachten und erhält mit einer angenommenen Kernleitfähigkeit von $6 \cdot 10^5$ S/m (Wicht et al. 2007) für die 88 Tage Umlaufperiode $\delta_{88} = 1,8$ km und für die 59 Tage Rotationsperiode $\delta_{59} = 1,5$ km. Diese Werte sind im Vergleich zur Kerngröße mit rund 2000 km (Smith et al. 2012) verschwindend klein und man kann davon ausgehen, dass die Felder mit dieser Variation nicht ausreichend tief in den Kern eindringen können, um den Dynamo zu beeinflussen. Diese Berechnung ist natürlich auch nur für ein horizontales, homogenes Feld gültig. Für externe Felder höherer Ordnung erhöht sich natürlich die Frequenz und verkleinert sich die Skintiefe noch weiter. Es ist also nach diesem Gesichtspunkt noch unwahrscheinlicher, dass z.B. ein $g_{2,\text{ext}}^1$ - Koeffizient einen Einfluss auf den Dynamo haben kann.

Ein weiterer wichtiger Aspekt ist, dass die externen Multipole proportional zum Faktor $\left(\frac{r}{R_M} \right)^{l-1}$ sind. Der externe Dipol ist demnach unabhängig vom Radius. Alle anderen Multipole fallen zur Kern-Mantel-Grenze hin ab und sind dadurch von untergeordneter Bedeutung für den Feedbackdynamo.

3 Modellierungsansätze des externen Feldes

Für die Simulation des Feedbackdynamos ist es essentiell für jeden Zustand des Dynamos das von der Magnetosphäre herrührende Magnetfeld zu kennen. Während also klassisch bei einer Magnetosphärensimulation bzw. -modellierung das Magnetfeld vom Planeten in guter Näherung als konstant angenommen werden kann, ist hier eine Parameterstudie mit verschiedenen internen Magnetfeldern nötig.

Um das externe Feld der Magnetosphäre zu modellieren, werden in dieser Arbeit verschiedene Ansätze für die Magnetopause verwendet. Außerdem wird ein semi-empirisches Modell, das für die Erdmagnetosphäre entworfen wurde, auf die Merkursituation extrapoliert. Dabei wird davon ausgegangen, dass der Sonnenwinddruck dem heutigen beim Merkur entspricht. Außerdem wird die Rekonnektion an der Magnetopause und die eventuelle Verschiebung des internen Dipols (s. Kapitel 9.1) vernachlässigt.

Die bisherigen Daten der MESSENGER-Sonde (z.B. Anderson et al. 2012) zeigen ein dominierendes, achsensymmetrisches internes Dipolfeld an der Oberfläche des Planeten. Im Fernfeld dominiert dieser interne Dipol natürlich dann noch stärker. Daher wurden für alle Modellierungen als innere Quelle lediglich ein Dipol mit variabler Stärke angenommen.

3.1 Konzeption der magnetosphärischen Antwortfunktion

Das externe Feld, das auf den Dynamo einwirkt, hängt potentiell von der Entfernung der Magnetopause zum Planeten und von der räumlichen Stromverteilung auf der Magnetopause ab. Wie in Kapitel 2.1 gezeigt, ist der räumliche Abfall der Magnetfeldstärke für den externen Dipol am geringsten. Daher wird für das externe Magnetopausenfeld in dieser Arbeit hauptsächlich das externe Dipolfeld verwendet. Ein weiterer Beitrag zum externen Dipol ergibt sich aus dem Neutralschichtstrom. Hierbei ist der Abstand der inneren Kante der Neutralschicht zum Planeten hin und die Stärke des Stroms entscheidend.

Um die Dynamosimulation zu vereinfachen, ist es sinnvoll, das externe Feld in parameterisierter Form

$$g_{1,\text{ext}}^0 = f_1(g_{1,\text{int}}^0) \quad (3.1)$$

mit dem internen und externen achsensymmetrischen Dipol-Gaussiaffizient $g_{1,\text{int}}^0$ und $g_{1,\text{ext}}^0$ anzugeben. Diese vermittelnde Funktion f_1 wird in dieser Arbeit und den bisherigen Veröffentlichungen als (*magnetosphärische*) *Antwortfunktion* bezeichnet. Eine andere

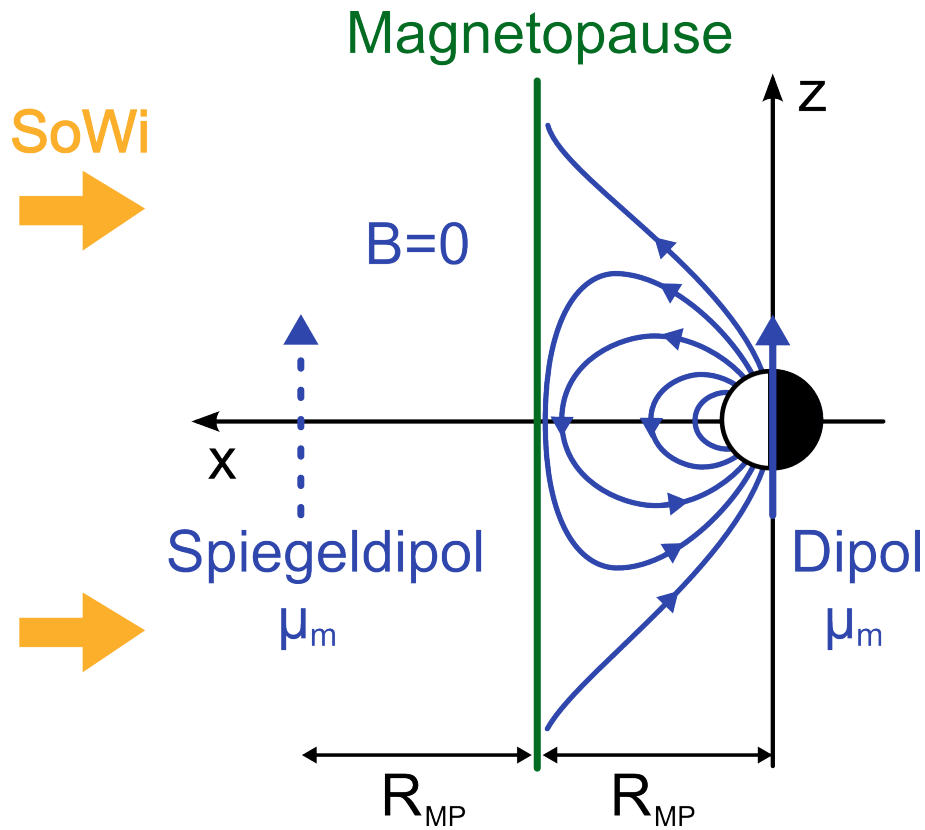


Abbildung 3.1: Modell zur ebenen Magnetopause. Der Sonnenwind kommt von links (gelbe Pfeile) und der Planet ist rechts dargestellt (Kreis). Der Planet hat ein Dipolmoment μ_m (blauer Pfeil) und hinter der Magnetopause im Abstand R_{MP} wird ein Spiegeldipol der gleichen Stärke angenommen. Das in etwa zu erwartende Gesamtmagnetfeld ist in blau skizziert.

Formulierung

$$\frac{g_{1,\text{ext}}^0}{g_{1,\text{int}}^0} = f_2(g_{1,\text{int}}^0) \quad (3.2)$$

ist hier als *relative Antwortfunktion* bezeichnet.

3.2 Planare Magnetopause

In einem einfach aufgebauten Magnetopausenmodell ist die Magnetopause eine ebene Fläche im Sonnenwind. Wenn man auf der Sonnenwindseite der Magnetopause einen Spiegeldipol platziert, kann man den magnetischen Fluss durch die Magnetopause kompensieren. Außerhalb der Magnetopause wird das Magnetfeld zu Null angenommen. Graphisch ist dieser Modellansatz in Abbildung 3.1 für die $y = 0$ -Ebene dargestellt. Wenn $\mu_m = g_{1,\text{int}}^0 R_M^3$ das magnetische Moment des Planeten ist, so kann das skalare magnetische Potential der Superposition von planetarem Dipol und Spiegeldipol als

$$\Psi = \mu_m \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \mu_m \frac{z}{((x - 2R_{MP})^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3.3)$$

und die Magnetfeldkomponenten (gemäß $\underline{B} = -\underline{\nabla}\Psi$) als

$$\begin{aligned} B_x &= 3z\mu_m \left(\frac{x - 2R_{\text{MP}}}{((x - 2R_{\text{MP}})^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right) \\ B_y &= 3yz\mu_m \left(\frac{1}{((x - 2R_{\text{MP}})^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right) \\ B_z &= \mu_m \left(3z^2 \left(\frac{1}{((x - 2R_{\text{MP}})^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{((x - 2R_{\text{MP}})^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

ausdrücken. Am subsolaren Punkt auf der Magnetopause reduziert sich damit die z -Komponente auf

$$B_z(x = R_{\text{MP}}, y = 0, z = 0) = -\frac{2\mu_m}{R_{\text{MP}}^3} . \quad (3.5)$$

Damit wird das Magnetfeld des internen Dipols an dieser Stelle gerade verdoppelt. Der Magnetopausenabstand ergibt sich aus dem Druckgleichgewicht des thermalisierten *Magnetosheath*plasmas außerhalb und des magnetischen Drucks innerhalb der Magnetopause:

$$\kappa p_{\text{sw}} = \frac{B^2}{2\mu_0} . \quad (3.6)$$

Damit ist dann der Magnetopausenabstand durch

$$R_{\text{MP}} = R_M \sqrt[6]{\frac{2(g_{1,\text{int}}^0)^2}{\mu_0 \kappa p_{\text{sw}}}} \quad (3.7)$$

definiert. Für die magnetosphärische Antwortfunktion muss jetzt noch das externe Magnetfeld an der Planetenoberfläche R_M analysiert werden. Das radiale, externe Magnetfeld in Kugelkoordinaten ist durch

$$B_{r,\text{ext}} = B_{x,\text{ext}} \sin \theta \cos \varphi + B_{y,\text{ext}} \sin \theta \sin \varphi + B_{z,\text{ext}} \cos \theta \quad (3.8)$$

gegeben und kann einer harmonischen Analyse (s. Kapitel 2.3) unterzogen werden.

Für die Parameter $p_{\text{sw}} = 13,4 \text{ nPa}$, $\kappa = 0,88$ (Prölss 2003), $g_{1,\text{int}}^0 = 200 \text{ nT}$ ($R_{\text{MP}} = 1,32R_M$) ergeben sich die externen Koeffizienten in Tabelle 3.1. Koeffizienten, die kleiner sind als $0,1 \text{ nT}$ wurden zu Null gesetzt. Es zeigt sich, dass neben dem $g_{1,\text{ext}}^0$ auch die Koeffizienten $g_{2,\text{ext}}^1$, $g_{3,\text{ext}}^0$ und $g_{3,\text{ext}}^2$ angeregt sind. Mit zunehmender Ordnung werden allgemein die Koeffizienten schwächer. Dies ist auf den geometrischen Abfall zum Planeten hin zurückzuführen. Die Koeffizienten $g_{2,\text{ext}}^1$ und $g_{3,\text{ext}}^2$ sind wahrscheinlich auf Grund ihrer geringen Skintiefe nicht von Bedeutung (s. Kapitel 2.6). Es ist in dieser Arbeit bisher nicht untersucht worden welchen Einfluss der anscheinend nicht komplett zu vernachlässigende $g_{3,\text{ext}}^0$ - Koeffizient auf den Dynamo besitzt. Da die räumliche Struktur dieser externen Mode ungleich komplexer ist als bei einem homogenen Feld, ist auch nicht einfach abzusehen, ob diese Mode einen positiven oder negativen Feedback auf den Dynamo haben kann.

Tabelle 3.1: Externe Gauss-Koeffizienten für die planare Magnetopause aus einer sphärisch-harmonischen Analyse mit $N_\theta = 300$, $N_\varphi = 600$ und $r = 2440$ km.

g/h	l	m	Amplitude [nT]
g	1	0	10,7
g	1	1	0
h	1	1	0
g	2	0	0
g	2	1	-7,0
h	2	1	0
g	2	2	0
h	2	2	0
g	3	0	-2,3
g	3	1	0
h	3	1	0
g	3	2	3,0
h	3	2	0
g	3	3	0
h	3	3	0

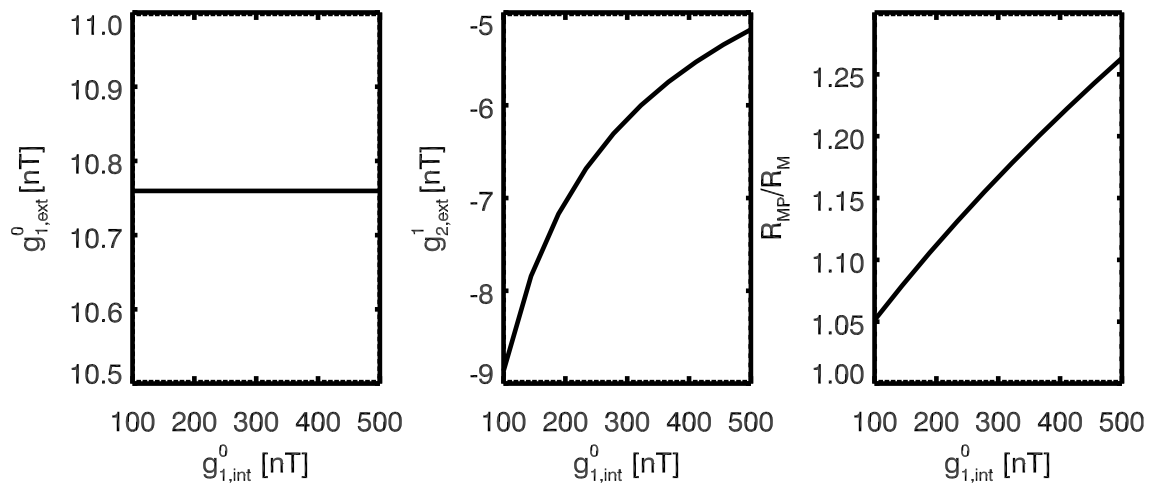


Abbildung 3.2: *Links:* Externes homogenes Feld. *Mitte:* Externes Quadrupol-Feld. *Rechts:* Lage der Magnetopause. Alle Funktionen wurden in Abhängigkeit des internen Dipolkoeffizienten dargestellt. Die Koeffizienten stammen aus einer sphärisch-harmonischen Analyse mit $N_\theta = 300$, $N_\varphi = 600$ und $r = 2440$ km.

Die Antwortfunktion für die planare Magnetopause ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Der externe Dipolkoeffizient bleibt für alle internen Dipolkoeffizienten konstant. Dieses Verhalten tritt auch bei einem anderen Magnetopausenmodell auf (s. Kapitel 3.4) und wird dort auch physikalisch gedeutet. Der externe Quadrupol nimmt mit zunehmenden internen Dipol ab, was wahrscheinlich auf die größere Distanz von der Planetenoberfläche zur Magnetopause zurückzuführen ist.

3.3 Ringförmiger Magnetopausenstrom

Glassmeier et al. (2007) benutzen für die ersten Modellierungen des Merkur-Feedbackdynamo ein einfaches Magnetopausenstrommodell. Dieses Modell wird im Folgenden dargestellt und auf dessen Grenzen eingegangen. Ausgehend von den Mariner 10-Messdaten (Ness et al. 1975) wird die Magnetopausenflächenstromdichte

$$\underline{i}_{cf} = -\frac{1}{\mu_0} \delta \underline{B}_{ext} \times \underline{e}_N = 1,9 \cdot 10^{-2} \text{ A/m} \quad (3.9)$$

aus dem Sprung des Magnetfeldes von 24 nT über die Magnetopause hinweg abgeschätzt. Hierbei bezeichnen $\delta \underline{B}_{ext}$ und \underline{e}_N die von den Magnetopausenströmen erzeugte Magnetfeldrotation und die lokale Normalenrichtung der Magnetopause. Wird die Magnetopause zunächst als Kugel mit dem Radius $R_{mp} = 1,7 R_M$ (dem damals abgeschätzten subsolaren Magnetopausenabstand) mit konstantem Strom angenommen, so ergibt sich der Gesamtstrom zu

$$I_{cf} = \pi R_{mp} i_{cf} = 2,5 \cdot 10^5 \text{ A} \quad (3.10)$$

Nun wird dieser Strom in einer ringförmigen Leiterschleife um den Planeten kollabiert wie in Abb. 3.3 skizziert. Für dieses externe Feld an der Kern-Mantel-Grenze wird ein analytischer Ausdruck für das Magnetfeld eines Ringstroms in der Ebene desselben angesetzt. Dieser besitzt in dieser Ebene nur eine Komponente in Z-Richtung also parallel zur Rotationsachse des Planeten:

$$B_{z,ext} = \frac{\mu_0 I_{cf}}{2\pi} C(r, R_{mp}) \quad (3.11)$$

mit

$$C(r, R_{mp}) = \frac{1}{R_{mp} + r} \left[K \left(\frac{r}{R_{mp}} \right) + \frac{R_{mp} + r}{R_{mp} - r} E \left(\frac{r}{R_{mp}} \right) \right] \quad (3.12)$$

wobei K und E komplette elliptische Integrale erster und zweiter Art sind. Wenn angenommen wird, dass der Außenraum um die Magnetopause feldfrei ist und die Gl. (3.9) und (3.10) mit (3.11) kombiniert werden, sowie ein dipolarer Abfall des Dynamofeldes nach außen angenommen wird, ergibt sich

$$I_{cf} = \frac{\pi B_{cmb} R_{cmb}^3}{\mu_0 R_{mp}^2} \quad (3.13)$$

Unter Vernachlässigung der Aufheizung des Magnetosheathplasmas ($\kappa = 1$) und der Annahme, dass nur das Dynamomagnetfeld B_{cmb} zum Gesamtmagnetfeld an der Magneto-

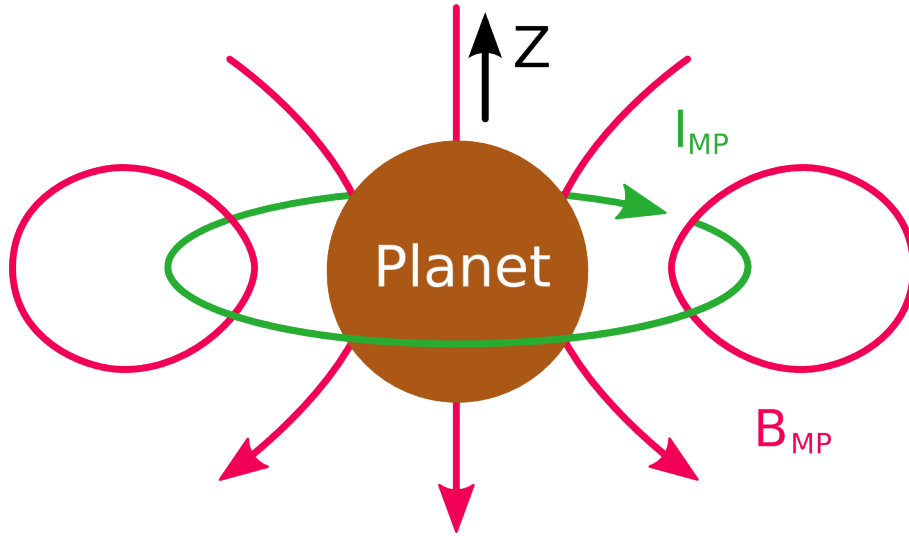


Abbildung 3.3: Skizze des zu einem Ringstrom kollabierten Magnetopausenstroms. Der Planet ist in der Mitte (braun), der Magnetopausenstrom (grün) ist zu einem ringförmigen Strom um den Planeten vereinfacht und das aus diesem Strom resultierende Magnetfeld ist in rot dargestellt.

pause beiträgt, ergibt sich für den Magnetopausenabstand R_{mp} aus dem Druckgleichgewicht

$$R_{mp} = R_{cmb} \sqrt[6]{\frac{B_{cmb}^2}{\mu_0 p_{sw}}} . \quad (3.14)$$

Damit ergibt sich letztlich für das externe Feld an der Kern-Mantel-Grenze

$$B_{z,ext,cmb} = \frac{B_{cmb} R_{cmb} C(R_{cmb}, R_{mp})}{2 \sqrt[3]{\frac{B_{cmb}^2}{\mu_0 p_{sw}}}} . \quad (3.15)$$

Die Amplitude dieses homogenen Feldes entspricht dem $g_{1,ext}^0$ -Koeffizienten in der Gaussentwicklung. Für entsprechende Dipolfeldstärken an der Oberfläche des Planeten ist dieser Koeffizient in Abbildung 3.4 dargestellt - dies lässt sich mit den anderen Modell-Ansätzen vergleichen. Die relative Antwortfunktion, die für die Entwicklung der Dynamos entscheidend ist, ist in Abbildung 3.5 gezeigt. Hieraus wird ersichtlich, dass das externe Feld für $g_{1,int}^0 \lesssim 280$ nT stärker ist als das interne - das externe Feld divergiert sogar für $g_{1,int}^0 \rightarrow 0$. Diese Situation ist mehr zur Magnetokonvektion als zu einem Dynamoprozess zuzuordnen, da sich hier der „Dynamo“ energetisch komplett aus dem externen Feld speisen kann.

Die Magnetopausenabstände für die jeweiligen internen Dipolfeldstärken sind in Abbildung 3.6 dargestellt. In diesem einfachen Modell für das externe Feld kann die Magnetopause beliebig nah an die Oberfläche heranrücken. Dies ist problematisch, da für schwache interne Felder (bzw. hohe stellare Drücke) die Magnetopause mit der Planetenoberfläche überlappt und damit dann das Stromsystem blockiert wird.

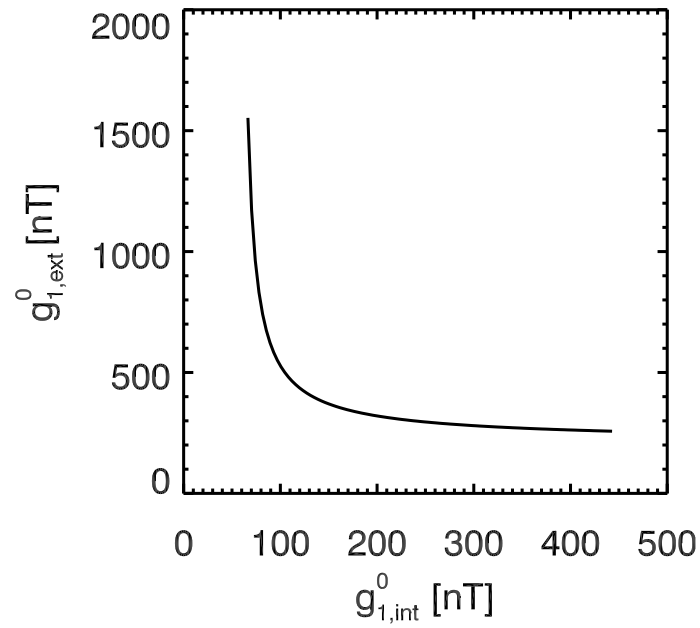


Abbildung 3.4: Externer Dipolkoeffizient als Funktion des internen für den ringförmigen Magnetopausenstrom.

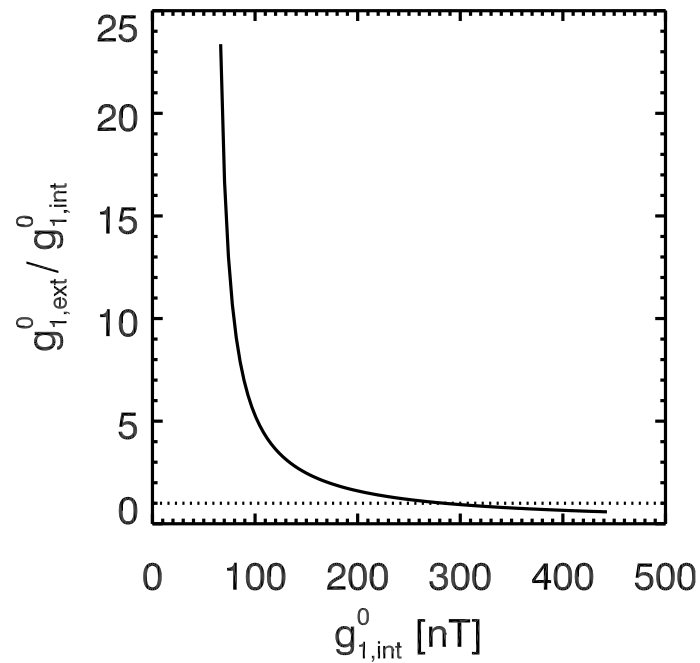


Abbildung 3.5: Verhältnis von externem zu internem Feld in Abhängigkeit vom internen Feld (durchgezogene Linie). Das Verhältnis von 1, das die Regime Magnetokonvektion und Dynamoprozess trennt, ist mit einer gepunkteten Linie dargestellt.

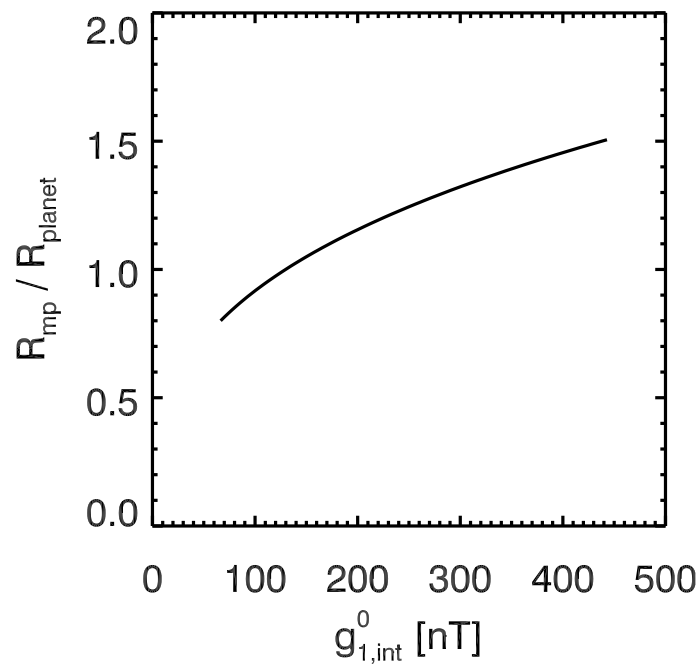


Abbildung 3.6: Sub-solarer Magnetopausenabstand als Funktion des internen Dipolfeldes für den ringförmigen Magnetopausenstrom.

3.4 Kugelmagnetosphäre

Anstatt wie im vorherigem Kapitel den Magnetopausenstrom auf einen ringförmigen Strom um den Planeten zu kondensieren, kann man eine einfache Stromverteilung zulassen, in dem man die Magnetopause als Kugel approximiert. Die hier vorgestellte Modellrechnung ist im wesentlichen von Willis et al. (2000) übernommen. Dieses Modell ist noch relativ einfach vom mathematischen Umfang, erlaubt aber schon wichtige Erkenntnisse über das Verhalten des externen Feldes bei einem sich ändernden internem Dipolfeld. In diesem Modell ist die Magnetosphäre von einem perfekt diamagnetischen Medium mit der Suszeptibilität $\chi = -1$ umhüllt (vgl. Abbildung 3.7). Daher muss der magnetische Fluss von der Magnetosphäre durch die Magnetopause verschwinden. Für das Kugelmodell der Magnetosphäre bedeutet das ein Verschwinden der Radialkomponente des magnetischen Feldes. Anschaulich bedeutet diese Bedingung, dass alle Magnetfeldlinien in der nächsten Umgebung der Magnetopause tangential zu ihr verlaufen (wie in Abbildung 3.8 dargestellt).

Willis et al. (2000) passen die Potentialentwicklung an, indem sie zur internen Potentialentwicklung ein externes Potential der abschirmenden Ströme hinzuaddieren. Durch die oben erwähnte Randbedingung bestimmt sich dann dieses externe Potential. Für das interne und externe Potential werden zunächst die Standardansätze wie in Gleichung (2.7) angesetzt.

Die Randbedingung lautet

$$B_r \Big|_{r=R_{MP}} = -\partial_r(\Psi_{int} + \Psi_{ext}) \Big|_{r=R_{MP}} = 0 \quad . \quad (3.16)$$

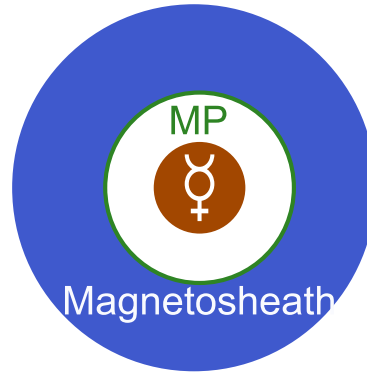


Abbildung 3.7: Schematische Darstellung der Modellmagnetosphäre in einem diamagnetischen Medium. Der Planet in der Mitte ist umgeben von seiner Magnetosphäre. Diese wiederum kann man als Aushöhlung in einem perfekt diamagnetischem Medium ansehen.

Also muss gelten

$$\sum_{l=1}^{l_{\max}} \sum_{m=0}^l \left(\left[(l+1) \left(\frac{R_M}{R_{MP}} \right)^{l+2} g_{l,\text{int}}^m - l \left(\frac{R_{MP}}{R_M} \right)^{l-1} g_{l,\text{ext}}^m \right] \cos(m\varphi) + \left[(l+1) \left(\frac{R_M}{R_{MP}} \right)^{l+2} h_{l,\text{int}}^m - l \left(\frac{R_{MP}}{R_M} \right)^{l-1} h_{l,\text{ext}}^m \right] \sin(m\varphi) \right) P_l^m = 0 \quad . \quad (3.17)$$

Da die Radialkomponente für alle Längen- und Breitengrade verschwinden soll, müssen die Ausdrücke in den eckigen Klammern in Gleichung (3.17) jeweils gleich Null sein. Daraus ergeben sich die Bedingungen

$$g_{l,\text{ext}}^m = \frac{l+1}{l} \left(\frac{R_M}{R_{MP}} \right)^{2l+1} g_{l,\text{int}}^m$$

und $h_{l,\text{ext}}^m = \frac{l+1}{l} \left(\frac{R_M}{R_{MP}} \right)^{2l+1} h_{l,\text{int}}^m \quad . \quad (3.18)$

Hierbei ist es interessant, dass für jede interne magnetische Quelle nur jeweils eine einzige externe Quelle angenommen werden muss. Dies ist bei komplizierteren Magnetopausenformen nicht mehr gegeben.

Letztendlich muss daher die Potentialentwicklung wie folgt angepasst werden, damit das Potential den Abschirmstrom bereits berücksichtigt:

$$\Psi = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l R_M \left(\frac{R_M}{r} \right)^{l+1} \left[1 + \frac{l+1}{l} \left(\frac{r}{R_{MP}} \right)^{2l+1} \right] \cdot \left[g_{l,\text{int}}^m \cos(m\varphi) + h_{l,\text{int}}^m \sin(m\varphi) \right] P_l^m \quad . \quad (3.19)$$

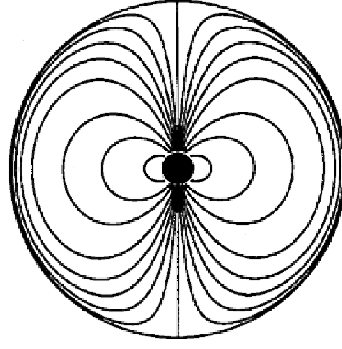


Abbildung 3.8: Kompensation eines Dipols durch einen Schichtstrom. Die Situation ist hier für den terrestrischen Fall dargestellt. Die Erde ist durch eine schwarze, ausgefüllte Kreisscheibe repräsentiert, während die Magnetopause durch einen Kreis markiert wird. Die schwarzen Magnetfeldlinien deuten an, dass das Magnetfeld auf die Magnetosphäre begrenzt ist und in Bezug zu ihr nur noch tangentielle Komponenten aufweist. Abbildung aus Willis et al. (2000).

Die Komponenten des Gesamtmagnetfeldes sind dann durch

$$\begin{aligned}
 B_r &= \sum_{l,m} (l+1) \left(\frac{R_M}{r} \right)^{l+2} \left[1 - \left(\frac{r}{R_{MP}} \right)^{2l+1} \right] (g_{l,int}^m \cos(m\varphi) + h_{l,int}^m \sin(m\varphi)) P_l^m \\
 B_\varphi &= \sum_{l,m} m \left(\frac{R_M}{r} \right)^{l+2} \left[1 + \frac{l+1}{l} \left(\frac{r}{R_{MP}} \right)^{2l+1} \right] (g_{l,int}^m \sin(m\varphi) - h_{l,int}^m \cos(m\varphi)) \frac{P_l^m}{\sin \theta} \\
 B_\theta &= - \sum_{l,m} \left(\frac{R_M}{r} \right)^{l+2} \left[1 + \frac{l+1}{l} \left(\frac{r}{R_{MP}} \right)^{2l+1} \right] (g_l^m \cos(m\varphi) + h_l^m \sin(m\varphi)) \frac{l \cos \theta P_l^m - (l+m) P_{l-1}^m}{\sin \theta}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

gegeben. Die zusätzlichen Faktoren in den eckigen Klammern [...] im Gleichungssystem (3.20) sind nicht von φ oder θ abhängig. Bemerkenswert ist zudem, dass sie gegen 1 konvergieren, wenn die Magnetopause unendlich weit vom Planeten weg ist. Das geänderte Gesamtpotential konvergiert also gegen das rein interne Potential für einen großen Magnetopausenabstand.

Ein Vorteil dieses Modells ist, dass sich recht einfach das externe Magnetfeld für jede magnetische Quelle im Zentrum berechnen lässt, die mit einem Potential in sphärischer Geometrie darstellbar ist. Die Beschränkung auf einen achsensymmetrischen, internen Dipol ($g_{1,int}^0$) lässt in Gleichung (3.20) nur noch die Radial- und die Polarkomponente übrig:

$$\begin{aligned}
 B_r &= 2 \left(\frac{R_M}{r} \right)^3 \left[1 - \left(\frac{r}{R_{MP}} \right)^3 \right] g_{1,int}^0 \cos \theta \\
 B_\theta &= \left(\frac{R_M}{r} \right)^3 \left[1 + 2 \left(\frac{r}{R_{MP}} \right)^3 \right] g_{1,int}^0 \sin \theta \quad .
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Um nun die Größe der Magnetopause durch das Druckgleichgewicht zu bestimmen, muss das direkt an der Magnetopause herrschende Magnetfeld berechnet werden. Bei $r = R_{MP}$

verbleibt lediglich eine polare Magnetfeldkomponente:

$$B_\theta = 3 \left(\frac{R_M}{R_{MP}} \right)^3 g_{1,\text{int}}^0 \sin(\theta) \quad . \quad (3.22)$$

Der magnetische Druck am sub-solaren Punkt ($\theta = 90^\circ$) ist dann

$$p_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{9}{2\mu_0} \left(\frac{R_M}{R_{MP}} \right)^6 (g_{1,\text{int}}^0)^2 \quad (3.23)$$

und wird an der Magnetopause durch den thermischen Druck des Magnetosheathplasmas

$$p_B = p_{\text{th}} = \kappa p_{\text{sw}} \quad (3.24)$$

kompensiert. Durch Einsetzen und Auflösen der letzten beiden Gleichungen gelangt man zum Magnetopausenabstand

$$R_{\text{MP}} = R_M \sqrt[6]{\frac{9 (g_{1,\text{int}}^0)^2}{2\mu_0 \kappa p_{\text{sw}}}} \quad (3.25)$$

Setzt man diesen Ausdruck für den Magnetopausenabstand in Gleichung (3.18) ein, so erhält man in der Dipolnäherung

$$g_{1,\text{ext}}^0 = 2 \left(\frac{R_M}{R_{\text{MP}}} \right)^3 g_{1,\text{int}}^0 = 2 \sqrt{\frac{2}{9} \mu_0 \kappa p_{\text{sw}}} \quad (3.26)$$

und für $\kappa = 0,88$ (Prölss 2003) und $p_{\text{sw}} = 13,4 \text{ nPa}$ (Glassmeier et al. 2007) einen externen Dipolkoeffizienten von 115 nT. Damit ist das externe Feld ersten Grades nicht vom internen Feld abhängig, sondern nur vom dynamischen Druck des Sonnenwindes. Intuitiv würde man vielleicht erwarten, dass sich das externe Feld für größere Magnetopausenabstände abschwächt. Dem steht aber entgegen, dass sich die Oberfläche der Magnetopause auch vergrößert, so dass auch mehr Strom fließen kann. Außerdem ist bei konstantem Sonnenwinddruck für eine Magnetopausenvergrößerung auch ein Anstieg des internen Feldes notwendig. Somit vergrößert sich die magnetische Diskontinuität über die Magnetopause hinweg und damit ist wiederum der Strom verstärkt. Warum sich die Effekte der Abstandsvergrößerung und der Stromverstärkung quantitativ gerade aufheben wird mit folgender energetischer Deutung anschaulich gemacht.

Für ausreichend große Magnetosphären (also vom Planeten ungestört) ist das externe Feld unabhängig vom internen Feld und es gilt nach Gleichung (3.26) der vereinfachte Zusammenhang

$$g_{1,\text{ext}}^0 \propto \sqrt{p_{\text{sw}}} \quad . \quad (3.27)$$

Die Magnetosphäre bildet einen Hohlraum (im Englischen ist passend von der *magnetospheric cavity* die Rede) im Sonnenwind. Die Magnetopause lässt sich auf der Tagseite bis hin zum Beginn des Magnetosphärenschweifs gut als Kugel approximieren. Das Volumen der Magnetosphäre ist dann im wesentlichen durch eine Kugel mit dem Volumen

$$V \propto R_{\text{MP}}^3 \quad (3.28)$$

beschrieben. Die kinetische Energie des Sonnenwindes in diesem Volumen wäre

$$E_{\text{kin}} \propto p_{\text{sw}} R_{\text{MP}}^3 \quad . \quad (3.29)$$

An der Magnetopause wird aber genau diese kinetische Energie in magnetische Energie der Größenordnung

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{mag}} \propto B_{\text{ext}}^2 R_{\text{MP}}^3 \propto (g_{1,\text{ext}}^0)^2 R_{\text{MP}}^3 \propto p_{\text{sw}} R_{\text{MP}}^3 \quad (3.30)$$

umgewandelt. Die magnetische Energie ist zum großen Teil durch den Term ersten Grades gespeist, da Multipole höheren Grades stärker (bzw. überhaupt) zum Planet abfallen. Aus Gleichung (3.30) wird die Beziehung (3.27) direkt nachvollziehbar. Das interne Magnetfeld ist also in dieser Näherung nur für den Abstand der Magnetopause verantwortlich, modifiziert aber in erster Näherung nicht das externe Magnetfeld.

3.5 Anpassung eines semi-empirischen, terrestrischen Modells

Die gut durch viele in-situ Messdaten untersuchte terrestrische Magnetosphäre kann mit einem semi-empirischen Modell (Tsyganenko 1995) beschrieben werden (dieses Modell wird im folgenden mit TS96 bezeichnet). Bei diesem Magnetosphärenmodell hängt die *Standoff*-Distanz und die Stromstärke auf der Magnetopause von den Sonnenwindbedingungen ab. Die Form der Magnetopause wird als Ellipsoid mit zylindrischer Fortsetzung auf der Nachtseite fest vorgegeben (vgl. Abbildung 3.9) - sie ist damit nicht selbstkonsistent in Bezug auf eine ausgeglichene Druckbilanz an der Magnetopause. Die räumlichen Maße der Magnetopause werden auf Basis von Satellitenbeobachtungen ermittelt. Innerhalb der Magnetosphäre wird das Magnetfeld als Summe von verschiedenen Quellen, wie internes Feld, Ringstrom, feldparalleles Stromsystem, usw., dargestellt. Für die Merkur-situation sind nicht alle diese Quellen nötig. Außerdem ist zunächst eine erste Näherung für die Modellierung des externen Feldes von Interesse. Weiterhin muss das terrestrische Modell an die vorherrschenden Bedingungen bei Merkur angepasst bzw. skaliert werden. Der Ansatz zur Skalierung basiert auf die Arbeit von Korth et al. (2004). Als interne Quelle wird lediglich ein zentrierter, axialer Dipol angenommen. Darüber hinaus gibt es keine permanent gefangenen Teilchen, die einen Ringstrom aufbauen könnten (vgl. Kapitel 2.4.3).

Die Skalierung des Magnetfeldes aus dem Modell wird linear angesetzt $B_M(r_M) = B_E(\gamma r_M)$, basierend auf dem Verhältnis der subsolaren Magnetopausenabstände:

$$\Gamma = \frac{R_{s,E}}{R_{s,M}} = \left(\frac{g_{1,\text{int},E}^0}{g_{1,\text{int},M}^0} \right)^{1/3} \left(\frac{p_{\text{sw},M}}{p_{\text{sw},E}} \right)^{1/6} = \Gamma_B \Gamma_p \quad (3.31)$$

hierbei sind die *Standoff*-Distanzen in Einheiten vom jeweiligen planetaren Radius. Tsyganenko (1996) schlagen einen leicht veränderten Skalenfaktor von

$$\Gamma_p = \left(\frac{p_{\text{sw},M}}{p_{\text{sw},E}} \right)^{0,14} \quad (3.32)$$

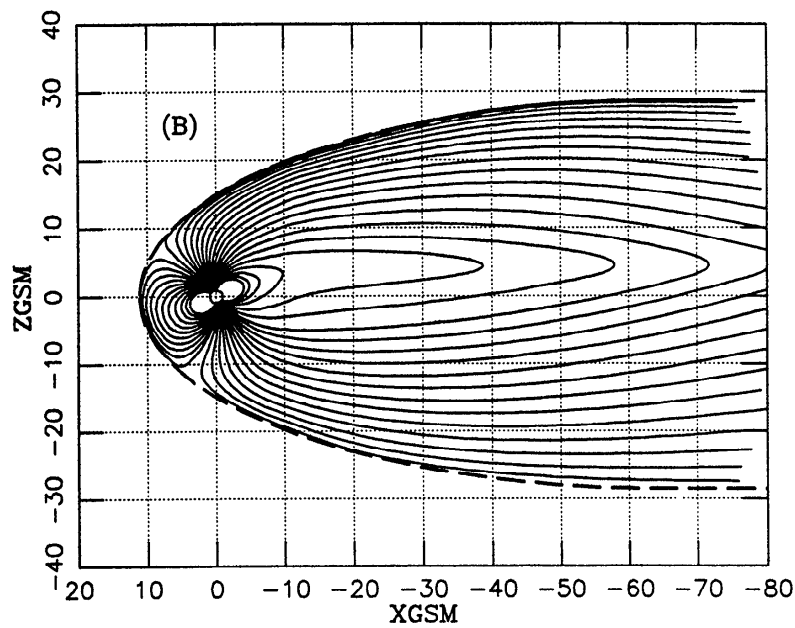


Abbildung 3.9: Magnetische Feldlinien im TS96-Modell. Gezeigt sind die Magnetfeldlinien in der X - Z -Schnittebene. GSM steht für das *Geocentric Solar Magnetic* Koordinatensystem. Die X -Achse ist mit der Verbindungslinie Erde-Sonne identisch, die Z -Achse zeigt in Richtung der Drehachse der Erde. Die Neigung des Dipols beträgt hier 20° gegen die Drehachse. Die Magnetopause ist als gestrichelte Linie dargestellt. Abbildung aus Tsyganenko (1995).

auf der Basis von Satellitendaten (Messungen bei höheren Sonnenwinddrücken bei der Erde) vor, der auch im Folgenden verwendet wird. Der Erddipol wird mit $g_{1,int,E}^0 = 30574 \text{ nT}$ und der mittlere Sonnenwinddruck mit $p_{sw,E} = 2 \text{ nPa}$ angesetzt. Beim Merkur beträgt der durchschnittliche dynamische Druck des Sonnenwindes in der heutigen Zeit $13,4 \text{ nPa}$ bei einer angenommenen Sonnenwindgeschwindigkeit von 400 km/s und einer mittleren Protonendichte von $5 \cdot 10^7 \text{ m}^{-3}$ (Glassmeier 1997).

Da die Magnetopausenform nicht kugelförmig ist, ergeben sich auch höhere Multipole als $l = 1$, obwohl nur ein axialsymmetrischer Dipol als innere Quelle angesetzt wurde. Wie in Kapitel 2.6 dargelegt, kann in erster Näherung der externe Dipol für das externe Magnetfeld verwendet werden.

Für eine erste Abschätzung des externen Feldes wird an dieser Stelle das Magnetfeld am subsolaren Punkt auf der Planetenoberfläche herangezogen. Dabei ergibt sich eine Abhängigkeit des externen Dipols vom internen wie die Kreuze in Abbildung 3.10 zeigen. Nach dieser Abschätzung ist das externe Feld stark, wenn der interne Dipol schwach ist und umgekehrt. Je schwächer das interne Feld ist, desto näher rückt die Magnetopause an den Planeten. Im Extremfall kann sich die Magnetopause teilweise oder ganz mit dem Planeten überlappen - dadurch wird der Magnetopausenstrom teilweise bzw. komplett vom Planeten blockiert. Dies ist schematisch in Abbildung 3.11 dargestellt. Für extreme Bedingungen (sehr schwaches planetares Feld und/oder sehr starker Sonnenwind) kann man zwar formal ein Druckgleichgewicht für die Positionsbestimmung der Magnetopause zum Beispiel nach Gleichung (3.25) ausrechnen, aber es kann sich ergeben, dass diese

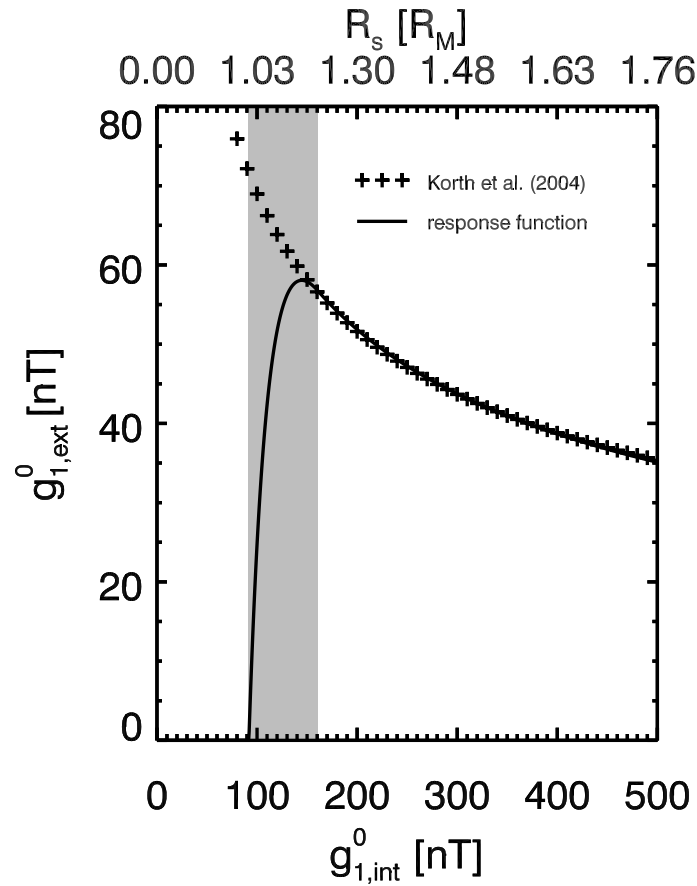


Abbildung 3.10: Antwortfunktion nach dem TS96-Modell. Das externe Dipolfeld wurde näherungsweise am sub-solaren Punkt auf der Planetenoberfläche bestimmt. Die Kreuze geben das formal bestimmte Feld an mit beliebig naher Magnetopause an der Oberfläche. Die durchgezogene Linie zeigt das Magnetfeld an, bei dem die Überlappung der Magnetopause mit der Planetenoberfläche berücksichtigt wurde. Die obere Abszisse zeigt die nach Gl. (3.25) gebildete *Standoff*-Distanz. Abbildung aus Heyner et al. (2010)

formale Magnetopause komplett innerhalb des Planeten liegen würde (*subkutane Magnetopause* in Abbildung 3.11). Da beim skalierten TS96 Modell die Planetenoberfläche sehr klein ist, kann im Modell die Magnetopause fast beliebig nahe am Planeten liegen. Um die blockierte Magnetopause in der Antwortfunktion abzubilden, wird die zunächst bestimmte Antwortfunktion künstlich gedämpft (durchgezogene Linie in Abbildung 3.10). Die Dicke der Magnetopause bei der Erde beträgt rund 500 km (Berchem und Russell 1982). Für eine erste Abschätzung wurde dieser Wert für Merkur zunächst übernommen. Die Antwortfunktion für diesen Fall lautet:

$$f_{\text{TS96_subsolar}} = \text{sgn}(g_{1,\text{int}}^0) \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < |g_{1,\text{int}}^0| < 91,8\text{nT} \\ \alpha (g_{1,\text{int}}^0)^{-\beta} (g_{1,\text{int}}^0 - 91,8) & \text{für } 91,8\text{nT} < |g_{1,\text{int}}^0| < 161\text{nT} \\ a \exp[b (g_{1,\text{int}}^0)^c] & \text{für } 161\text{nT} < |g_{1,\text{int}}^0| \end{cases} \quad (3.33)$$

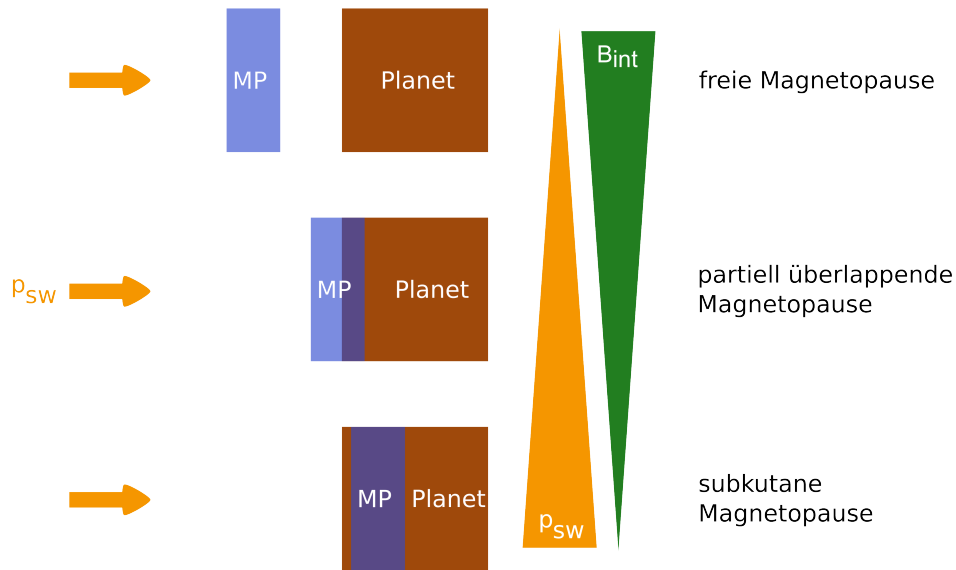


Abbildung 3.11: Schematische Darstellung der möglichen Magnetopausenarten:

- 1: freie Magnetopause. Hier ist der Abstand zwischen Magnetopause und Planet groß genug, so dass die Ströme ungestört fließen können.
- 2: partiell überlappende Magnetopause. Die Magnetopause überlappt teilweise mit dem Planeten, so dass ein Teil der Ströme nicht ungestört fließen kann.
- 3: die subkutane Magnetopause. In dieser Situation ist der magnetische Druck von innen nicht ausreichend und das Magnetopausenstromsystem bricht komplett zusammen.

mit

$$\begin{aligned}
 a &= 136680 \text{ nT} \\
 b &= -5,9565 \text{ nT}^{-c} \\
 c &= 5,2749 \cdot 10^{-2} \\
 \alpha &= \frac{a \exp(161^c b)}{69,2 \cdot 161^{-\beta}} \\
 \beta &= -2,32(69,2 b c 161^{c-1} - 1)
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Diese Funktion ist in Abb. 3.10 als durchgezogene Linie dargestellt.

Bei einer vollständigen Bestimmung dieses externen Dipols mittels einer sphärisch harmonischen Analyse auf der gesamten Planetenoberfläche (vgl. Kapitel 2.3) ergibt sich die Antwortfunktion wie in Abbildung 3.12 dargestellt. Der externe Dipolkoeffizient steigt nach diesem Modell an und erreicht bei rund $g_{1,\text{int}}^0 = 1000 \text{ nT}$ ein stabiles Niveau. Dieses stabile Niveau bestätigt qualitativ das Ergebnis des Kugelmagnetosphären-Modells (s. Kapitel 3.4). Jedoch ist hier das externe Feld gerade mal halb so stark. Dies kann auf den Einfluss des Neutralschichtstroms auf der Nachtseite zurückgeführt werden. Dieses Stromsystem wurde in der Kugelmagnetosphäre nicht berücksichtigt. Die Überlagerung vom Chapman-Ferraro-Magnetfeld mit dem Feld des Neutralschichtstroms ist schematisch in Abbildung 3.13 dargestellt. Daraus ist ersichtlich, dass diese Felder an der Planetenoberfläche antiparallel ausgerichtet sind. Wenn der Neutralschichtstrom die Modell-

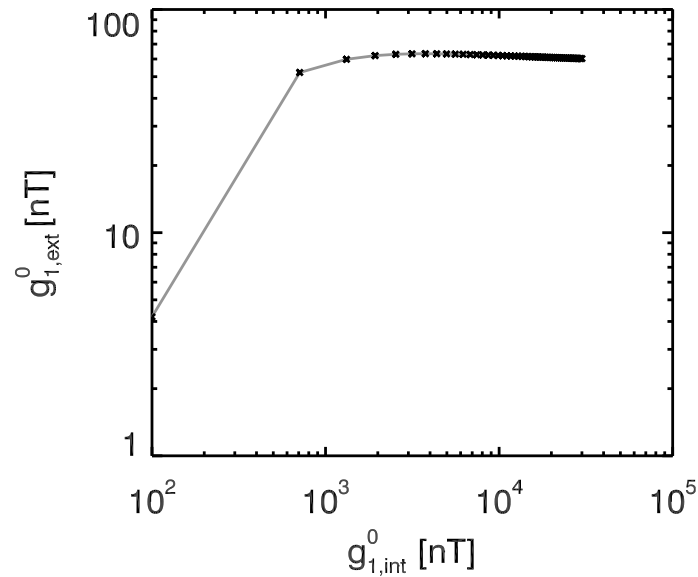


Abbildung 3.12: Vollständige Antwortfunktion nach dem TS96-Modell. Ergebnis einer harmonischen Analyse mit $N_\theta = 100$, $N_\varphi = 200$ und $r = 1R_M$. Die graue Linie ist lediglich eine visuelle Hilfe.

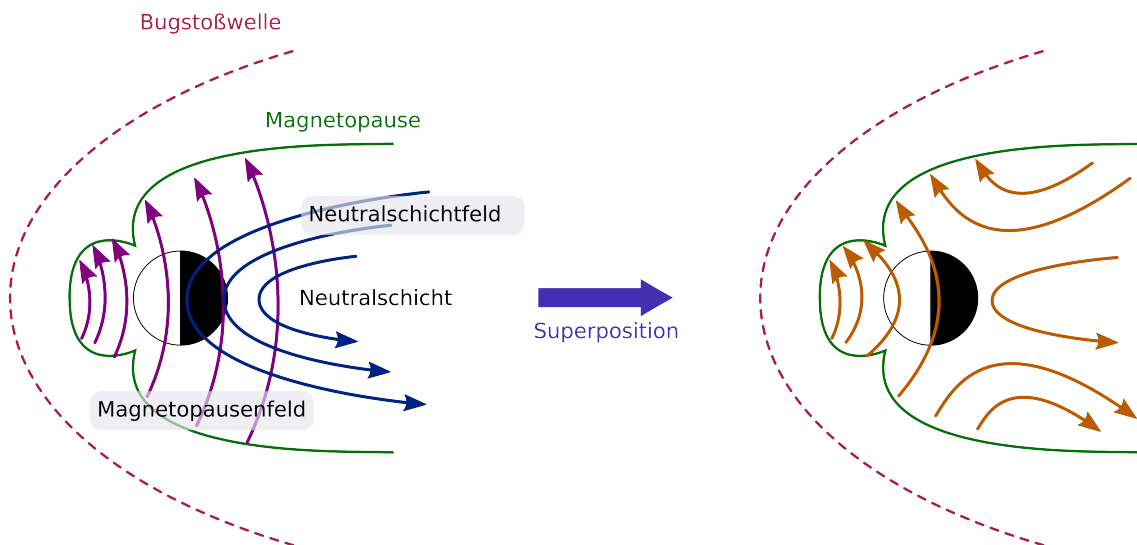


Abbildung 3.13: Schematische Darstellung der externen Magnetfelder der Magnetopausenströme und des Neutralschichtstroms in einem meridionalen Querschnitt durch die Magnetosphäre. Der Sonnenwind strömt von links heran, interagiert mit dem planetaren Magnetfeld und es bildet sich die Magnetopause aus (durch die grüne Linie angedeutet). Das Feld der Magnetopausenströme (lila Pfeile) ist annähernd homogen nach oben ausgerichtet. Dieses Feld überlagert sich u.a. mit dem Feld des Neutralschichtstroms (blau) auf der Nachtseite. Insgesamt ergibt sich eine Feldkonfiguration wie rechts in orange dargestellt.

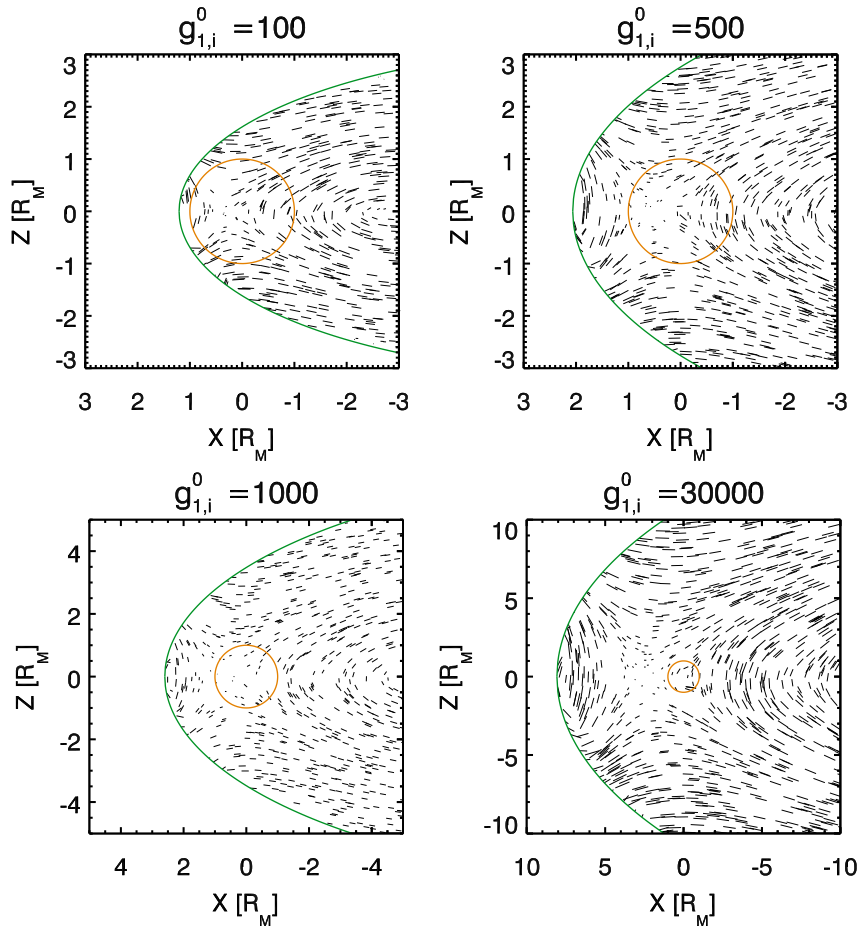


Abbildung 3.14: Darstellung der externen Feldausrichtung nach dem TS96-Modell für verschiedene Stärken des internen Feldes (in den Überschriften der Teilabbildungen) in einem meridionalen Schnitt durch die Magnetosphäre. Der Planet ist als orangener Kreis und die Modellmagnetopause als grüne Parabel angedeutet.

magnetosphäre dominiert, also sich sehr nah am Planeten befindet bzw. sehr stark ist, wird der gemittelte, achsensymmetrische Anteil des externen Feldes relativ gering.

In Abbildung 3.14 ist beispielhaft die externe Feldausrichtung nach dem TS96-Modell gezeigt. Diese zeigt die erwartete X-förmige Ausrichtung der Überlagerung von Magnetopausen- mit dem Neutralschichtfeld. Das Zentrum dieser X-Linie ist bemerkenswerter Weise nicht im Zentrum des Planeten und kann z.B. bei einem erdähnlichen internen Dipol sogar außerhalb dessen liegen. Der Beginn der Stromschicht wird im TS96-Modell auf eine *Standoff*-Distanz auf der Nachtseite des Planeten festgelegt. Es stellt sich die Frage, ob überhaupt die Skalierung der terrestrischen Magnetosphäre auf die Merkursituation wie oben beschrieben gerechtfertigt ist. Die Skalierung mit dem Sonnenwinddruck nach Gleichung (3.32) ist nur für den terrestrischen Wert des dynamischen Druckes durch Daten belegt (Tsyganenko 1996). Weiterhin ist die Frage, ob sich die charakteristischen Parameter des Neutralschichtstroms (also Profil, Ausdehnung und Lage) für verschiedene Sonnenwindparameter unterscheiden.

Das TS96-Modell wurde seit der Version von (Tsyganenko 1995) überarbeitet. So ist bei dem Modell in der Version von Tsyganenko und Sitnov (2005) (hier als TS04-Modell

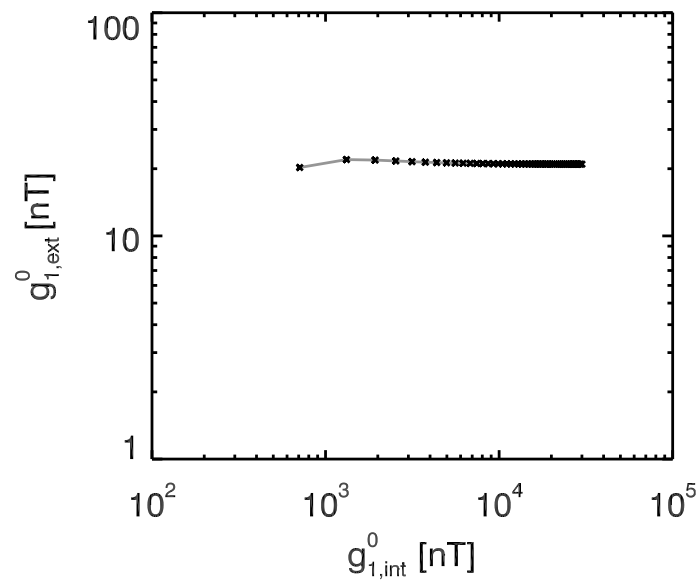


Abbildung 3.15: Vollständige Antwortfunktion nach dem TS04-Modell. Ergebnis einer harmonischen Analyse mit $N_\theta = 100$, $N_\varphi = 200$ und $r = 1R_M$. Die graue Linie ist lediglich eine visuelle Hilfe.

bezeichnet) die Lage des Neutralschichtstroms in X_{MSO} -Richtung eher variabel (zum Beispiel in Abhängigkeit vom herrschenden Sonnenwinddruck) und nicht auf eine subsolare *Standoff*-Distanz festgelegt. Mit diesem Modell ergibt sich eine ähnliche Antwortfunktion, jedoch ist der externe Dipolkoeffizient um rund ein Drittel schwächer, wie es in Abbildung 3.15 dargestellt ist.

3.6 Parabolisches Modell

Alexeev et al. (2010) analysieren das Merkurmagnetfeld mit Hilfe eines analytischen Magnetosphärenmodells. Sie stellen die Magnetopause als Rotationsparaboloiden dar und kompensieren an dieser Magnetopause die internen magnetosphärischen Quellen. Das parabolische Modell geht auf die Arbeit von Greene und Miller (1994) zurück und wurde unter anderem von Belenkaya et al. (2005) auf die Jupitermagnetosphäre angewendet. Ein Rotationsparaboloid ist gegenüber einer Kugelschale eine realistischere Magnetopausenform, da sie zur sonnenabgewandten Seite hin geöffnet ist, also einen Magnetosphärenschweif beinhaltet. Dieser Vorteil ist aber zugleich ein Nachteil, da die divergente Form dieser Magnetopause die Anwendbarkeit des Modells auf die Region nahe am Planeten beschränkt. Durch die Wahl eines paraboloidalen Koordinatensystems ist es möglich, für das magnetische Kompensationsproblem an der Magnetopause analytisch eine Lösung anzugeben, die aber numerisch ausgewertet werden muss. Außerdem erlaubt es dieses Modell potentiell, den Einfluss des Neutralschichtstromes auf die Antwortfunktion näher zu untersuchen. Dies war mit dem semi-empirischen Modell, das in Kapitel 3.5 vorgestellt wurde, in dieser Arbeit nicht möglich, da das öffentlich zugängliche numerische Programm es nicht ohne weiteres erlaubt, den Neutralschichtstrom zu modifizieren. In den Arbeiten Greene und Miller (1994), Belenkaya et al. (2005) und Alexeev et al. (2010)

sind zum Teil unterschiedliche Definitionen und Normierungen zu finden und die verwendeten Ansätze werden nicht hinreichend motiviert. Daher soll in diesem Kapitel das paraboloidale Modell und seine mathematische Struktur detailliert dargestellt werden.

3.6.1 Das Chapman-Ferraro-Feld im parabolischen Modell

Auf der Magnetopause fließen Ströme, die das im Planeteninneren erzeugte Magnetfeld nach Außen hin abschirmen. Innerhalb der Magnetosphäre wird lokale Stromfreiheit angenommen. Daher lässt sich das wirbelfreie Magnetfeld \underline{B} wie schon in Kapitel 2.1 als Gradient eines magnetischen Potentials Ψ schreiben:

$$\underline{B} = -\underline{\nabla}(\Psi_i + \Psi_e) \quad (3.35)$$

mit Ψ_i und Ψ_e als internem und externem Potentialanteil. Da das Magnetfeld quellenfrei ist, muss das Potential die Laplace-Gleichung erfüllen:

$$\Delta(\Psi_i + \Psi_e) = 0 \quad (3.36)$$

Der Außenraum der Magnetosphäre sei feldfrei. Daher muss an der Magnetopause die totale Normalkomponente des Magnetfeld kompensiert werden

$$\underline{n} \cdot \underline{\nabla}(\Psi_i + \Psi_e) \Big|_{\text{MP}} = 0 \quad (3.37)$$

mit \underline{n} als Normalenvektor an der Magnetopause. Wenn die Magnetopause als Paraboloid angenommen wird, kann ein parabolisches Koordinatensystem so gewählt werden, dass die Magnetopause gerade durch eine einzige Koordinate darstellbar ist. Das Koordinatensystem mit den Koordinaten (α, β, ϕ) enthält einen Paraboloiden mit einer konstanten Koordinate $\beta = 1$ der die Magnetopause beschreibt. Das Potential muss dann nur nach dieser Koordinate β differenziert werden, um die Normalkomponente zu erhalten, damit die Bedingung (3.37) in möglichst einfacher Form zu erfüllen ist:

$$\underline{e}_\beta \cdot \underline{\nabla}(\Psi_i + \Psi_e) \Big|_{\text{MP}} = 0 \quad (3.38)$$

Die Flächen mit konstantem α sind konfokale Rotationsparaboloiden, die in Richtung Sonne geöffnet sind, während die Flächen mit konstantem β Rotationsparaboloiden mit dem selben Fokuspunkt aber in Richtung Nachtseite geöffnet sind, wie es in Abbildung 3.16 gezeigt ist. Der Fokus der Paraboloiden ist bei $\alpha = \beta = 0$, an dieser Stelle ist jedoch nicht der Planetenmittelpunkt. ϕ misst den Winkel um die Merkur-Sonnen-Achse, dabei stellt $\phi = 0$ die hermeographische Nordrichtung und $\phi = \pi/2$ die Morgenrichtung dar. Die Magnetopause sei bei $\beta = 1$ definiert. Der Zusammenhang zwischen den MSO-Koordinaten und den parabolischen ist

$$\begin{aligned} X_{\text{MSO}} &= \frac{R_s}{2}(\beta^2 - \alpha^2 + 1) \\ Y_{\text{MSO}} &= R_s \beta \alpha \sin \phi \\ Z_{\text{MSO}} &= R_s \beta \alpha \cos \phi \end{aligned} \quad (3.39)$$

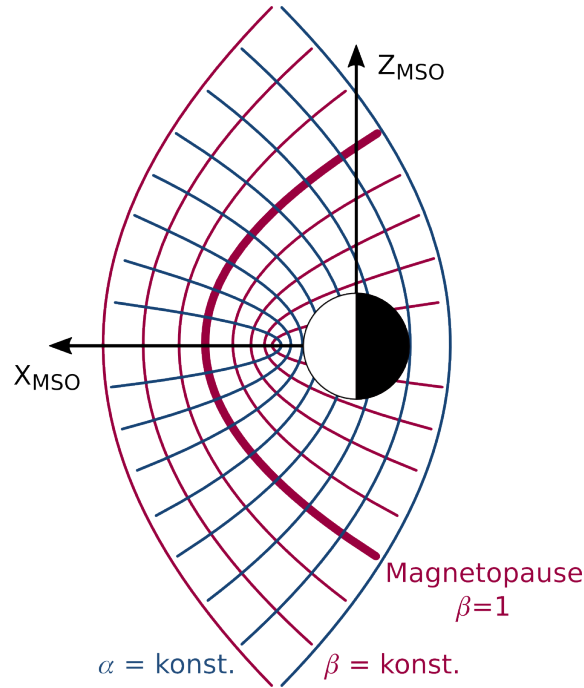


Abbildung 3.16: Darstellung der parabolischen Koordinaten α und β in einem Schnitt durch die Mittag-Mitternachtsebene. Der Planet ist als Kreis dargestellt und befindet sich nicht im Fokuspunkt der Paraboloiden. Zur Orientierung sind auch die X- und die Z-Achse des MSO-Koordinatensystems eingezeichnet.

Hierbei ist R_s der Abstand vom Planetenzentrum zum subsolaren Punkt auf der Magnetopause ($\beta = 1$ und $\alpha = 0$) und stellt eine wichtige Skalenlänge für die Magnetopause dar. Der Fokuspunkt der Parabeln liegt bei $X_{\text{MSO}} = R_s/2$. Die Rücktransformation lautet :

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \sqrt{w - \rho} \\
 \beta &= \sqrt{w + \rho} \\
 \phi &= \arctan\left(\frac{Y_{\text{MSO}}}{Z_{\text{MSO}}}\right) \\
 \rho &:= \frac{X_{\text{MSO}}}{R_s} - \frac{1}{2} \\
 w &:= \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{Y_{\text{MSO}}}{R_s}\right)^2 + \left(\frac{Z_{\text{MSO}}}{R_s}\right)^2}
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Für die Transformation eines Vektors lässt sich folgende Drehmatrix anwenden:

$$\underline{B}_{\text{MSO}} = \begin{pmatrix} B_X \\ B_Y \\ B_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & 0 \\ \frac{\beta \sin \phi}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & \frac{\alpha \sin \phi}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & \cos \phi \\ \frac{\beta \cos \phi}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & \frac{\alpha \cos \phi}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & -\sin \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_\alpha \\ B_\beta \\ B_\phi \end{pmatrix} = \underline{R} \underline{B}_{\text{PAR}} \tag{3.41}$$

Die Distanz zum Planetenmittelpunkt ist durch

$$r = \sqrt{X_{\text{MSO}}^2 + Y_{\text{MSO}}^2 + Z_{\text{MSO}}^2} = \frac{R_s}{2} \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2 - 4\alpha^2} \tag{3.42}$$

gegeben. Als intern erzeugtes Feld wird nur der zentrale, achsensymmetrische Dipol betrachtet. Dann ist das Dipolmoment von Merkur allein durch

$$\mu_m = g_{1,\text{int}}^0 R_M^3 \quad (3.43)$$

definiert. Damit lässt sich das Potential eines Dipolfeldes durch

$$\Psi_i(X_{\text{MSO}}, Y_{\text{MSO}}, Z_{\text{MSO}}) = \mu_m \frac{Z_{\text{MSO}}}{r^3} \quad (3.44)$$

darstellen. Dieses Potential lässt sich durch Gl. (3.39) und (3.42) in das parabolische Koordinatensystem transformieren:

$$\Psi_i(\alpha, \beta, \phi) = \frac{\mu_m}{R_s^2} \frac{8\alpha\beta \cos \phi}{((\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2 - 4\alpha^2)^{3/2}} \quad (3.45)$$

Dieser Ausdruck lässt sich auch mit Besselfunktionen darstellen, denn es gilt:

$$\int_0^\infty \lambda^2 J_1(\lambda\alpha) K_1(\lambda\beta) J_1(\lambda) d\lambda = \frac{4\beta\alpha}{((\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2 - 4\alpha^2)^{3/2}} \quad (3.46)$$

(Greene und Miller 1994).¹ Hierbei sind J und K Besselfunktionen der ersten Art (oszillierend, keine Singularität) und modifizierte Besselfunktionen zweiter Art (monoton, Singularität im Ursprung). Eingesetzt in Gleichung (3.45) ergibt sich:

$$\Psi_i(\alpha, \beta, \phi) = 2 \frac{\mu_m}{R_s^2} \cos \phi \int_0^\infty \lambda^2 J_1(\lambda\alpha) K_1(\lambda\beta) J_1(\lambda) d\lambda \quad (3.47)$$

Der Ansatz für das externe Potential muss drei Bedingungen genügen. Erstens muss das Potential eine Lösung der Laplace-Gleichung in parabolischen Koordinaten darstellen. Zweitens muss das Potential mit zunehmenden β anwachsen. Drittens muss das externe Potential die Kompensation der Normalkomponente an der Magnetopause herstellen. Daher wird ein ähnlicher Ansatz wie in Gl. (3.47) gewählt, nur dass die modifizierte Besselfunktion 2. Art K durch eine der 1. Art I ersetzt wurde (Singularität im Unendlichen):

$$\Psi_e(\alpha, \beta, \phi) = 2 \frac{\mu_m}{R_s^2} \cos \phi \int_0^\infty \lambda^2 J_1(\lambda\alpha) I_1(\lambda\beta) F(\lambda) d\lambda \quad (3.48)$$

Die Funktion $F(\lambda)$ ist nun so zu bestimmen, dass die Randbedingung erfüllt wird. Dazu muss das die Ableitung bezüglich β des Gesamtpotentials an der Magnetopause gerade verschwinden. Der Gradient in parabolischen Koordinaten ist durch

$$\underline{\nabla}_{\text{PAR}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_s \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \partial_\alpha \\ \frac{1}{R_s \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \partial_\beta \\ \frac{1}{R_s \alpha \beta} \partial_\phi \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

¹Für eine Erweiterung dieses Modells um einen internen Quadrupol müsste hier eine äquivalente Gleichung gefunden werden.

gegeben. Es muss also gelten:

$$0 = \partial_\beta(\Psi_i + \Psi_e) \Big|_{\beta=1} = \int_0^\infty \lambda^2 J_1(\lambda\alpha) \partial_\beta [K_1(\lambda\beta)J_1(\lambda) + I_1(\lambda\beta)F(\lambda)]_{\beta=1} d\lambda \quad . \quad (3.50)$$

Dies ist erfüllt wenn

$$F(\lambda) = -J_1(\lambda) \frac{K'_1(\lambda)}{I'_1(\lambda)} \quad (3.51)$$

gilt, denn

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\beta \left(K_1(\lambda\beta)J_1(\lambda) - I_1(\lambda\beta)J_1(\lambda) \frac{K'_1(\lambda)}{I'_1(\lambda)} \right) \Big|_{\beta=1} \\ &= \lambda J_1(\lambda) \left(K'_1(\lambda\beta) - I'_1(\lambda\beta) \frac{K'_1(\lambda)}{I'_1(\lambda)} \right) \Big|_{\beta=1} \\ &\stackrel{\beta=1}{=} 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.52)$$

Die Striche symbolisieren die Ableitung nach dem Argument der Funktion. Die Ableitungen der Besselfunktionen können durch Rekursionen ausgedrückt werden. Nach Abramowitz und Stegun (1970) gilt:

$$\begin{aligned} \partial_z I_1(z) &= \frac{1}{2} (I_0(z) + I_2(z)) \\ \partial_z J_1(z) &= \frac{1}{2} (J_0(z) - J_2(z)) \\ \partial_z K_1(z) &= -\frac{1}{2} (K_0(z) + K_2(z)) \quad . \end{aligned} \quad (3.53)$$

Damit ergibt sich das externe Potential zu

$$\Psi_e(\alpha, \beta, \phi) = 2 \frac{\mu_m}{R_s^2} \cos \varphi \int_0^\infty \lambda^2 J_1(\lambda\alpha) I_1(\lambda\beta) J_1(\lambda) \left(\frac{K_0(\lambda) + K_2(\lambda)}{I_0(\lambda) + I_2(\lambda)} \right) d\lambda \quad . \quad (3.54)$$

Die Magnetfeldkomponenten ergeben sich durch Gradientenbildung nach Gl. (3.49):

$$\begin{aligned}
 B_{\alpha,i} &= -\frac{2\mu_m \cos \phi}{R_s^3 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int_0^\infty \lambda^2 \partial_\alpha J_1(\lambda\alpha) K_1(\lambda\beta) J_1(\lambda) d\lambda \\
 &= -\frac{\mu_m \cos \phi}{R_s^3 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int_0^\infty \lambda^3 (J_0(\lambda\alpha) - J_2(\lambda\alpha)) K_1(\lambda\beta) J_1(\lambda) d\lambda \\
 B_{\beta,i} &= -\frac{2\mu_m \cos \phi}{R_s^3 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int_0^\infty \lambda^2 J_1(\lambda\alpha) \partial_\beta K_1(\lambda\beta) J_1(\lambda) d\lambda \\
 &= \frac{\mu_m \cos \phi}{R_s^3 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int_0^\infty \lambda^3 J_1(\lambda\alpha) (K_0(\lambda\beta) + K_2(\lambda\beta)) J_1(\lambda) d\lambda \\
 B_{\phi,i} &= \frac{2\mu_m \sin \phi}{R_s^3 \alpha \beta} \int_0^\infty \lambda^2 J_1(\lambda\alpha) K_1(\lambda\beta) J_1(\lambda) d\lambda \\
 B_{\alpha,e} &= -\frac{\mu_m \cos \phi}{R_s^3 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int_0^\infty \lambda^3 (J_0(\lambda\alpha) - J_2(\lambda\alpha)) I_1(\lambda\beta) J_1(\lambda) \frac{K_0(\lambda) + K_2(\lambda)}{I_0(\lambda) + I_2(\lambda)} d\lambda \\
 B_{\beta,e} &= -\frac{\mu_m \cos \phi}{R_s^3 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \int_0^\infty \lambda^3 J_1(\lambda\alpha) (I_0(\lambda\beta) + I_2(\lambda\beta)) J_1(\lambda) \frac{K_0(\lambda) + K_2(\lambda)}{I_0(\lambda) + I_2(\lambda)} d\lambda \\
 B_{\phi,e} &= +\frac{\mu_m \sin \phi}{R_s^3 \alpha \beta} \int_0^\infty \lambda^2 J_1(\lambda\alpha) I_1(\lambda\beta) J_1(\lambda) \frac{K_0(\lambda) + K_2(\lambda)}{I_0(\lambda) + I_2(\lambda)} d\lambda \quad . \quad (3.55)
 \end{aligned}$$

Für die ressourcensparende numerische Berechnung empfiehlt es sich, für den internen Magnetfeldanteil die herkömmliche Kugelfunktionsentwicklung für den Dipol in Kapitel 2.1 zu verwenden. Die internen Komponenten sind hier der Vollständigkeit halber und zwecks späterer Verwendung angegeben. Die numerische Integration der externen Komponenten ist recht aufwendig, da in den Integranden Produkte von unregelmäßig oszillierenden Besselfunktionen auftauchen. Für die numerische Auswertung wurde sukzessive von Nullstelle zu Nullstelle des Integranden mittels einer Standardmethode integriert.

3.6.2 Druckbilanz am subsolaren Punkt

Die *Standoff*-Distanz lässt sich im Allgemeinen durch eine Druckbilanzgleichung abschätzen, sofern das interne und externe Magnetfeld analytisch definiert sind. Für den subsolaren Punkt auf der Magnetopause gilt im parabolischen Koordinatensystem $\beta = 1$, $\alpha = 0$ und $\phi = 0$. Die α -Komponente ist die Tangentialkomponente des magnetischen Feldes an der Magnetopause und ist dort alleine für den magnetischen Druck verantwortlich.

Nach Gleichung (3.55) reduzieren sich die α -Komponenten zu:

$$\begin{aligned}
B_{\alpha,i} &= -\frac{\mu_m}{R_s^3} \int_0^\infty \lambda^3 (J_0(0) - J_2(0)) K_1(\lambda) J_1(\lambda) d\lambda \\
B_{\alpha,e} &= -\frac{\mu_m}{R_s^3} \int_0^\infty \lambda^3 (J_0(0) - J_2(0)) I_1(\lambda) J_1(\lambda) \frac{K_0(\lambda) + K_2(\lambda)}{I_0(\lambda) + I_2(\lambda)} d\lambda \\
\rightarrow B_{\alpha,tot} &= -g_{1,int}^0 \frac{R_M^3}{R_s^3} \int_0^\infty \lambda^3 (J_0(0) - J_2(0)) J_1(\lambda) \left[K_1(\lambda) + I_1(\lambda) \frac{K_0(\lambda) + K_2(\lambda)}{I_0(\lambda) + I_2(\lambda)} \right] d\lambda \\
&= -g_{1,int}^0 \frac{R_M^3}{R_s^3} \underbrace{\int_0^\infty \lambda^3 J_1(\lambda) \left[K_1(\lambda) + I_1(\lambda) \frac{K_0(\lambda) + K_2(\lambda)}{I_0(\lambda) + I_2(\lambda)} \right] d\lambda}_{=: C} . \quad (3.56)
\end{aligned}$$

Aus dem Druckgleichgewicht

$$\frac{B_\alpha^2}{2\mu_0} = \kappa p_{sw} \quad (3.57)$$

folgt dann die Standoff-Distanz

$$R_{s,0} = R_M \sqrt[6]{\frac{C^2 (g_{1,int}^0)^2}{2\mu_0 \kappa p_{sw}}} \quad (3.58)$$

mit $\kappa \approx 0,88$. Mittels numerischer Standardintegration (über die ersten 20 Nullstellen von J_1 mit jeweils 100 Stützstellen im Intervall zwischen den Nullstellen) ergibt sich ein Wert $C = 1,52$. Basierend auf den MESSENGER-Daten für den Merkur finden Winslow et al. (2013) für den subsolaren Magnetopausenabstand ein Skalierungsgesetz

$$R_{s,1} \sim p_{sw}^{-1/6,75 \pm 0,024} . \quad (3.59)$$

Dies stellt also eine leichte Abweichung von der Standardskalierung $R_{s,0}$ dar.

3.6.3 Antwortfunktion basierend auf dem parabolischen Magnetopausenmodell

Analog zu den vorhergegangenen Kapiteln wird hier mittels des parabolischen Magnetopausenmodells das externe Magnetfeld für verschiedene interne Dipolmomente bestimmt und einer sphärisch harmonischen Analyse unterzogen (siehe Kapitel 2.3). Dabei wird das externe Magnetfeld außerhalb der Magnetopause numerisch zu Null gesetzt. Dies erlaubt eine realistische Bestimmung des externen Dipolkoeffizienten, auch wenn ein Teil der Magnetopause mit der Planetenoberfläche überlappt. Wenn die standardmäßige Skalierung des subsolaren Magnetopausenabstandes nach Gleichung (3.58) verwendet wird, ergibt sich eine magnetosphärische Antwortfunktion wie sie in Abbildung 3.17 dargestellt ist. Nach einem parabelförmigen Anstieg bis zu einem Wert von $g_{1,int}^0 \approx 120$ nT, ab dem die Magnetopause außerhalb des Planeten liegt, ist das externe Feld konstant bei etwa

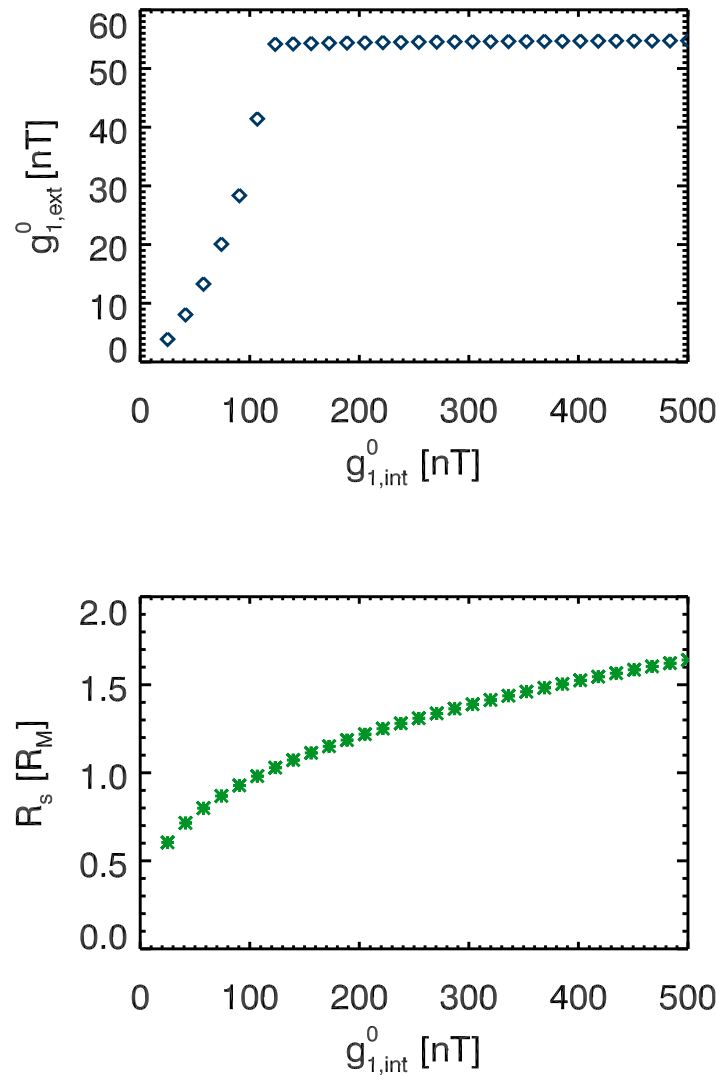


Abbildung 3.17: *Oben*: Externes Dipolfeld in Abhängigkeit des internen für das parabolische Modell. *Unten*: Magnetopausenabstand in planetaren Radien in Abhängigkeit des internen Dipolfeldes. Der Sonnenwinddruck wurde mit $p_{sw} = 13,4$ nPa abgeschätzt und die Standardskalierung für den subsolaren Abstand nach Gleichung (3.58) verwendet.

55 nT, unabhängig vom internen Feld. Der subsolare Magnetopausenabstand verändert sich wie erwartet gemäß einer Wurzelfunktion.

Etwas anders gestaltet sich die Antwortfunktion wenn das empirische Skalierungsgesetz nach Gleichung (3.59) auch auf das interne Magnetfeld angewendet wird. Die sich dann ergebende Antwortfunktion und der Magnetopausenabstand sind in Abbildung 3.18 gezeigt. Der Übergang von der partiell überlappenden Magnetopause hin zur freien Magnetopause ist wieder bei etwa 120 nT, aber für stärkere interne Dipolfelder nimmt das externe Feld leicht zu. Dies lässt sich mit dem etwas schwächeren Anstieg des subsolaren Magnetopausenabstandes verstehen.

Das Magnetopausenmagnetfeld kann eventuell noch durch das sog. *Flaring* der Magnetopause beeinflusst werden. Dieses verändert den Krümmungsgrad der Magnetopause. Das *Flaring* wird von Belenkaya et al. (2005) mit dem Parameter γ eingeführt. Die

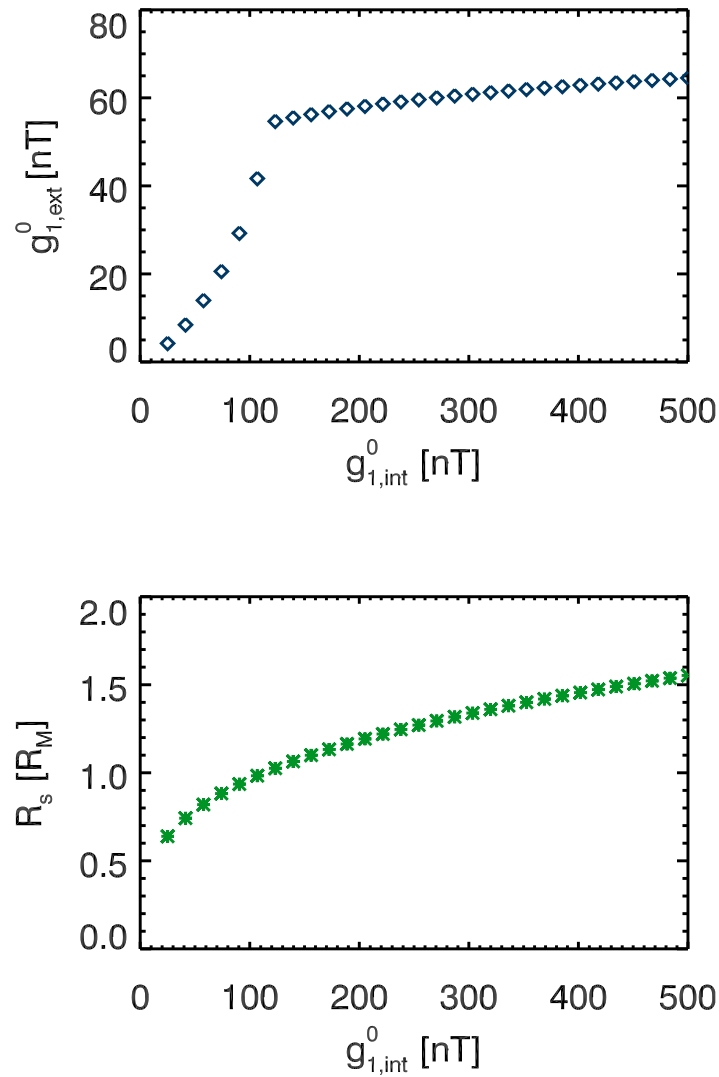


Abbildung 3.18: *Oben*: Externes Dipolfeld in Abhängigkeit des internen für das parabolische Modell. *Unten*: Magnetopausenabstand in planetaren Radien in Abhängigkeit des internen Dipolfeldes. Der Sonnenwinddruck wurde mit $p_{\text{sw}} = 13,4$ nPa abgeschätzt und die modifizierte Skalierung für den subsolaren Abstand nach Gleichung (3.59) verwendet.

hier dargestellte Umsetzung des parabolischen Modells entspricht dem Spezialfall $\gamma = 1$. Für den Merkur passen Johnson et al. (2012) und Winslow et al. (2013) einen *Flaring*-Parameter im Bereich von $1,0 \leq \gamma \leq 1,1$ unabhängig von den Sonnenwindbedingungen an. Zusätzlich zum Feld der Chapman-Ferraro-Ströme trägt auch das Magnetfeld des Neutralschichtstroms zum externen Gesamtfeld bei. Der Neutralschichtstrom ist in dieser Arbeit noch nicht implementiert und sollte in Zukunft zusammen mit einem konsistenten Flaring zum Modell hinzugefügt werden. Johnson et al. (2012) haben das parabolische Modell benutzt, um die externen Feldanteile aus den MESSENGER-Daten abzusparieren. Die externen Felder sind in Abbildung 3.19 gezeigt. Das Neutralschichtmagnetfeld trägt im wesentlichen auf der Nachtseite zum Gesamtmagnetfeld bei und die Maximalamplitude ist nur rund ein Viertel so groß wie die Maximalamplitude des Magnetopausenfeldes. Es kann also ein messbarer aber nicht entscheidender Einfluss des Neutralschicht-

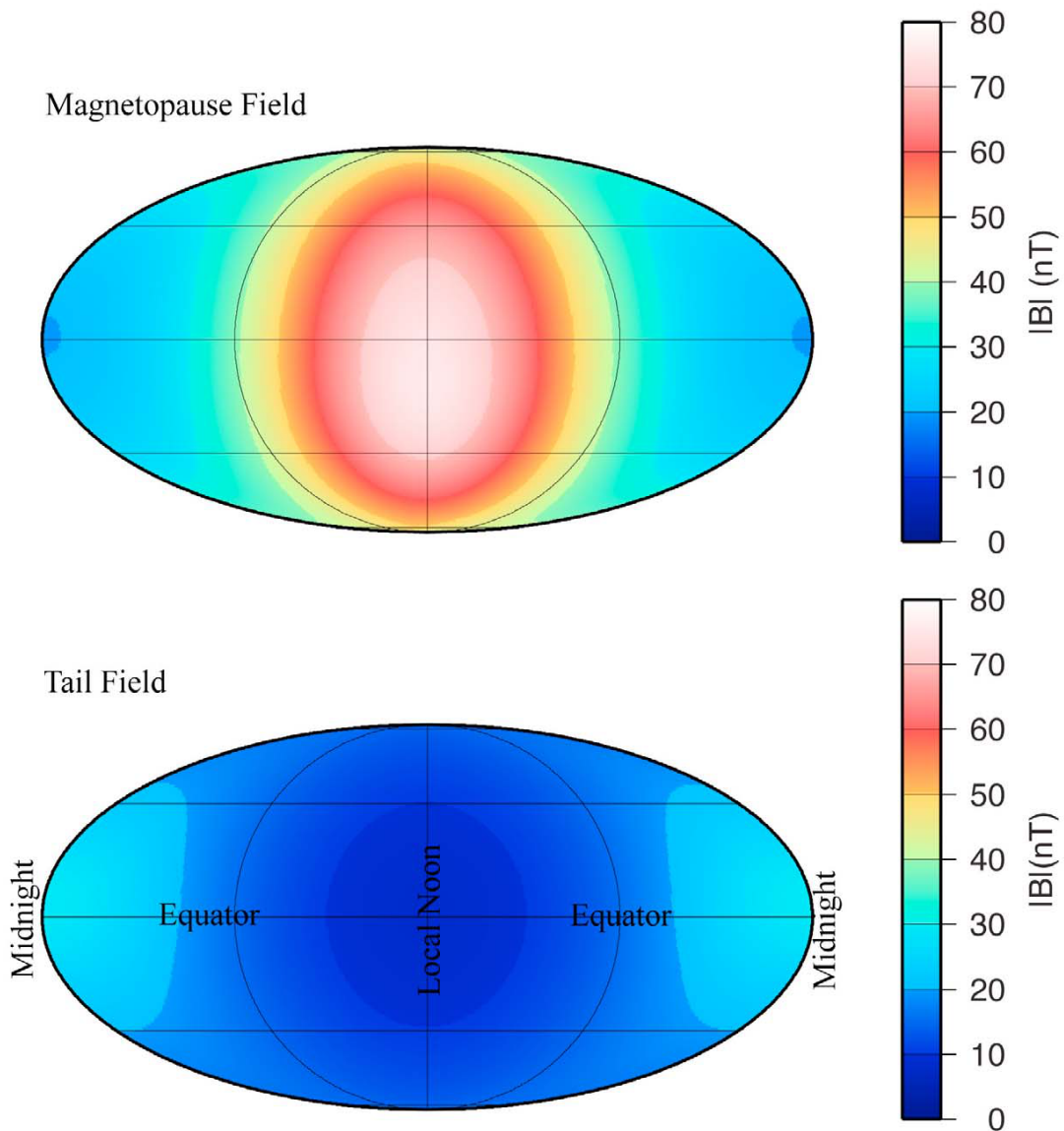


Abbildung 3.19: Externe Felder des parabolischen Modells an der Oberfläche basierend auf MESSENGER-Daten. *Oben*: Betrag des Magnetopausenfeldes. *Unten*: Betrag des Neutralschichtmagnetfeldes. Abbildung aus Johnson et al. (2012).

feldes auf die Antwortfunktion erwartet werden.

Die endliche Dicke der Magnetopause kann auch in diesem Modell implementiert werden (Alexeev und Kalegaev 1995). Damit könnte es möglich sein, den Kollaps der Magnetopause an der Planetenoberfläche für schwache interne Dipolfelder oder hohe Sonnenwinddrücke realistischer zu studieren. Weiterhin bietet es sich an, die Umströmung in der *Magnetosheath*-Region an das Modell anzuschließen (Alexeev et al. 1998, 2003). Mit dieser Erweiterung könnte man in Zukunft die Abhängigkeit des *Flarings* vom dynamischen Druck untersuchen. Nach der Studie von Shue et al. (1998) ist nur eine leichte Variation des *Flarings* zu erwarten. Allerdings basiert die Arbeit von Shue et al. (1998) auf für die Erde extremen Sonnenwinddrücken bis zu bis 60 nPa. Es stellt sich die Fra-

ge, in wie weit die von Shue et al. (1998) abgeleitete Abhängigkeit des *Flarings* auf die Merkurbedingungen extrapolieren lässt.

4 Hybridsimulation der Wechselwirkung des planetaren Magnetfeldes mit dem Sonnenwind

4.1 Motivation

Im vorangegangenen Kapitel 3 konnte ein erster Einblick in die Gestalt der magnetosphärischen Antwortfunktion gewonnen werden. Die Mehrzahl der Modelle sagen ein konstantes externes Feld unabhängig vom internen Dipolfeld voraus (für eine freie Magnetopause, unbeeinflusst von der Planetenoberfläche). Die Grenzamplitude des externen Feldes wird im Wesentlichen vom Sonnenwinddruck und durch die gewählte Magnetopausenform bestimmt. Die Magnetosphärenmodelle sind numerisch relativ einfach umzusetzen und schnell auswertbar. Allerdings weisen die verwendeten Magnetosphärenmodelle auch einige Nachteile auf. Die Magnetopausenform ist nicht selbstkonsistent, sondern sie wird fest vorgegeben. Weiterhin wird nur im Tsyganenko-Modell (s. Kapitel 3.5) der Neutralschichtstrom berücksichtigt. Dabei ist es nicht klar, ob das Tsyganenko-Modell linear auf die Merkur-Situation zu übertragen ist. Die Magnetopausenmodelle weisen auch keine *Cusp*-Regionen auf, bei denen ein Teil des Magnetopausenstromes näher an den Planeten rückt und damit eventuell den externen Feldanteil der Magnetopausenströme verstärkt. Nicht zuletzt stellte sich die Frage, ob noch andere Stromsysteme, wie zum Beispiel ein partieller Ringstrom, auch noch einen Einfluss auf die Antwortfunktion haben.

Um ein besseres Bild der Wechselwirkung des planetaren Magnetfeldes mit dem Sonnenwind zu erhalten, wurde eine Parameterstudie mit einem Hybrid-Simulationsprogramm unternommen. In diesem Simulationsprogramm werden die Elektronen des Plasmas als Flüssigkeit und die Ionen als Teilchen behandelt. Dadurch steigt der numerische Aufwand, aber man erhält ein realistisches Modell der Magnetosphäre. So können zum Beispiel eingefangene Ionen simuliert werden, die um den Planeten driften. In der Parameterstudie wurde die Stärke des internen Feldes variiert, und jeweils das externe Feld einer sphärisch-harmonischen Analyse unterzogen. Daraus ergibt sich die magnetosphärische Antwortfunktion und diese kann mit den zuvor modellierten Funktionen verglichen werden.

4.2 Modellbeschreibung und Simulationskonfiguration

Als Simulationsprogramm wurde der A.I.K.E.F.-Hybridcode (*Adaptive Ion Kinetic Electron Fluid*) verwendet. Details zum Simulationsprogramm sind bei Müller et al. (2011) und Müller (2012) zu finden. Müller et al. (2012) haben schon mit diesem Programm die Merkmagnetosphäre simuliert und die so erhaltenen Daten erfolgreich mit den MESS-NGER-Magnetometerdaten der Merkurvorbeiflüge verglichen.

In diesem Simulationsprogramm sind die Elektronen als Flüssigkeit und die Ionen als Teilchen (mehrere Teilchen als Makropartikel) beschrieben. Die Elektronen besitzen in diesem Modell keine Masse und gleichen eventuelle Ionenanhäufungen aus, so dass Quasi-Neutralität herrscht. Weiterhin wird angenommen, dass das Sonnenwindplasma ideal leitend ist ¹. Aus der Navier-Stokes-Gleichung für die Elektronen ergibt sich dann die Gleichung für das elektrische Feld

$$\underline{E} = \underbrace{-\underline{u}_i \times \underline{B}}_{\text{Lorentz}} + \underbrace{\frac{1}{\mu_0 \rho_{c,i}} (\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B}}_{\text{Hall}} - \underbrace{\frac{\nabla p_e}{\rho_{c,i}}}_{\text{Elektronendruck}}. \quad (4.1)$$

Hierbei stellt \underline{u}_i die mittlere Geschwindigkeit der Ionen an einem Gitterknoten dar. Die Ladungsdichte der Ionen ist durch $\rho_{c,i}$ gegeben. Für den Elektronendruck p_e wird eine adiabatische Zustandsgleichung angesetzt:

$$p_e = p_{e,0} \left(\frac{n_e}{n_{e,0}} \right)^\kappa = p_{e,0} \left(\frac{\rho_c}{\rho_{c,0}} \right)^\kappa \quad (4.2)$$

hierbei steht $\kappa = (f + 2)/f$ für den Adiabatenkoeffizienten. Im Simulationsprogramm wird für die Freiheitsgrade der Teilchen f ein Wert von 2 angenommen (Bagdonat 2005) und somit berücksichtigt, dass das Magnetfeld die Bewegungsfreiheitsgrade der Teilchen einschränkt. $p_{e,0}$ und $\rho_{c,0}$ sind die initialen Werte des Elektronendrucks und der Ladungsdichte. Die Evolutionsgleichung für das Magnetfeld kann mittels Anwendung des Faradayschen Gesetzes

$$-\partial_t \underline{B} = \nabla \times \underline{E} \quad (4.3)$$

auf Gleichung (4.1) bestimmt werden:

$$\partial_t \underline{B} = \nabla \times (\underline{u}_i \times \underline{B}) - \nabla \times \left(\frac{(\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B}}{\mu_0 \rho_{c,i}} \right). \quad (4.4)$$

Somit sind die elektrischen und magnetischen Felder bestimmt. Damit kann dann die Bewegung der Ionen ermittelt werden. Die Bewegungsgleichung der Ionen ist durch

$$d_t \underline{v}_i = \frac{e}{m_i} (\underline{E} + \underline{v}_i \times \underline{B}) \quad (4.5)$$

gegeben. Hierbei sind e, m_i und \underline{v}_i die Elementarladung, die Partikelmasse und die Geschwindigkeit der einzelnen Makropartikel. Die Ladungsdichte der Ionen und die mittlere

¹Die auftretenden Felder durchlaufen einen Smoothingprozess, um die Simulation zu stabilisieren. Dadurch wird eine künstliche, numerische Diffusion eingeführt, die unter anderem einer hohen, aber endlichen Leitfähigkeit des Plasmas entspricht.

Geschwindigkeit kann aus den Positionen und den Geschwindigkeiten der Ionen an einem Gitterknoten (mittels Momentebildung) ermittelt werden. Das A.I.K.E.F.-Simulationsprogramm bildet die Momente, ermittelt die Felder und löst die Bewegungsgleichungen auf einem numerischen Gitter als Anfangs-Randwertproblem. Das Simulationsprogramm bietet prinzipiell die Möglichkeit, die Gitterauflösung bei interessanten Regionen statisch während der gesamten Simulation oder adaptiv zu erhöhen. In dieser Arbeit wurde keine Gitterverfeinerung verwendet, da es zunächst nur um eine grobe Einschätzung der Antwortfunktion geht. Zu numerischen Details des Simulationsprogramms sei hier auf Müller et al. (2011) und Müller (2012) verwiesen.

Im Simulationsprogramm werden die physikalischen Größen auf die typischen Hintergrundwerte im freien Sonnenwind normalisiert. Eine für Merkur typische Wahl von $n_0 = 32 \text{ cm}^{-3}$ und $B_0 = 21 \text{ nT}$ resultiert in den Skalen $x_0 = 32,2 \text{ km}$, $V_A = 64,8 \text{ km/s}$ und $\Omega = 2 \text{ s}^{-1}$. Hierbei sind x_0 , V_A , n_0 und Ω die Ionenträgheitslänge (Gyroradius eines Protons mit Alfvén-Geschwindigkeit), die Alfvén-Geschwindigkeit, die Protonenanzahldichte und die Gyrationfrequenz. Die Hintergrundwerte stammen von Milillo et al. (2005). Nimmt man für die Sonnenwindgeschwindigkeit $v_{\text{sw}} = 400 \text{ km/s}$ an, so entspricht sie im Hybridcode einem Wert von 6,17. Der Planet besitzt im Hybridcode einen Radius von 75,8. Müller et al. (2012) verwendeten für den Mantel ein Leitfähigkeitsprofil, um den Effekt von induzierten Ströme simulieren zu können. Diese Ströme beruhen aber im Wesentlichen auf dem Einschaltvorgang und nicht auf zum Beispiel periodischen Änderungen der Magnetosphäre. Da nicht sichergestellt ist, wie realistisch dieser Ansatz ist, wird in dieser Arbeit für die Simulationen ein hoher Wert der entdimensionalisierten magnetischen Diffusivität von $\eta = 10$ für den Planeten verwendet (die Diffusivitätsskala ist $\eta_0 = 2,57 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$), damit das externe Feld fast ungestört eindringen kann. Somit sollten die induzierten Ströme und damit auch die induzierten internen magnetischen Momente innerhalb des Planeten vernachlässigbar sein.

Die Simulationsgeometrie ist in Abbildung 4.1 gezeigt. Der Planet ist im Zentrum der Simulationsbox. Dieses Gitter ist kartesisch mit den Achsen X , Y und Z . Dabei zeigt das planetare magnetische Moment in die positive Z -Richtung und der Sonnenwind strömt in die positive X -Richtung. Das interplanetare Magnetfeld ist südwärts gewählt (negative Z -Richtung), um die tagseitige Rekonnektion zu unterbinden. Das Simulationsgitter wurde auf 10 planetare Radien in alle drei Raumrichtungen mit 240 Gitterpunkten pro Richtung eingestellt. Damit ergibt sich ein Knotenabstand von 102 km. Globale Strukturen wie die Bugstoßwelle und die Magnetopause werden mit dieser Auflösung hinreichend genau dargestellt. Der Planet befand sich in der Mitte. Der Kernradius wurde auf 0,75 Planetenradien eingestellt, was 1830 km entspricht. Nach neuestem Kenntnisstand ist dies etwas zu niedrig - Merkurs Kern hat etwa eine Größe von 2030 km (Smith et al. 2012). Der innere Rand ist die Planetenoberfläche, da Merkur keine Atmosphäre und damit keine Ionosphäre besitzt. Nach ca. 20000 Zeitschritten zu je $dt = 0,0125 \text{ s}$ wurde ein in etwa stationärer Zustand erreicht. Bei diesem Zeitschritt war gewährleistet, dass die schnellsten Protonen eine Gitterzelle in minimal 5 Zeitschritten (meist waren deutlich mehr nötig) durchquerten. Der Sonnenwind besteht nur aus Protonen, also keine zusätzliche, schwere Spezies. Das Verhältnis vom thermischen zum magnetischen Druck wurde sowohl für die Elektronen als auch für die Protonen (initial) auf 0,4 eingestellt. Zur Einfachheit wurde der dynamische Druck des Sonnenwindes bei dieser Studie konstant gelassen. Der Betrag des achsensymmetrischen Gauss-Koeffizienten wurde von 0 bis 500 nT variiert (s.

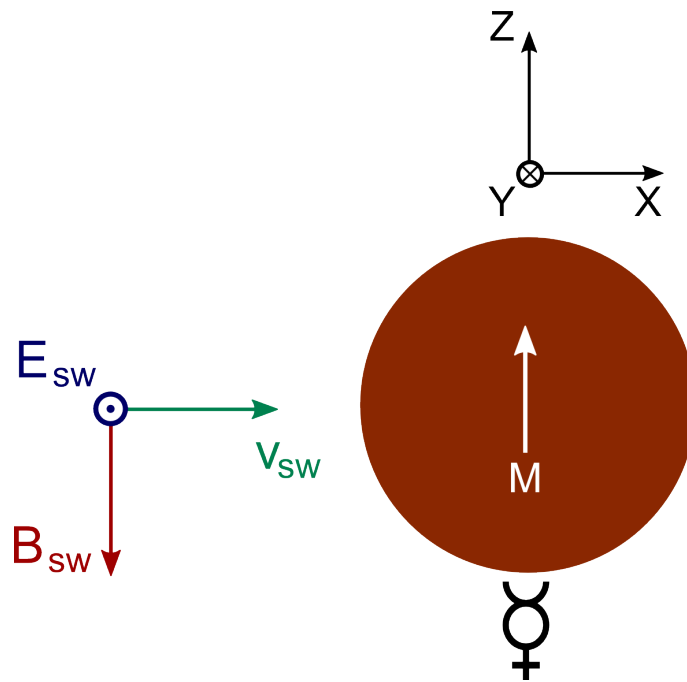


Abbildung 4.1: Schema der Simulationsgeometrie. Der Sonnenwind strömt von links gegen den Planeten (brauner Kreis) mit dem magnetischen Moment M (weißer Pfeil). Das mitkonvektierte Magnetfeld im Sonnenwind B_{sw} ist nach unten gerichtet. Die X -Richtung zeigt von der Sonne zum Planeten, die Z -Achse definiert das magnetische Moment und die Y -Achse komplettiert das rechtshändige Koordinatensystem.

Tabelle 4.1: Übersicht über die Hybridsimulationen mit Identifikationsnummer (ID) und die gewählten internen Dipolkoeffizienten.

ID	$g_{1,int}^0$ [nT]
90	0
91	50
92	100
93	150
94	200
95	250
96	300
86	350
80	400
87	450
81	500

Tabelle 4.1).

Das Feld, das durch die Wechselwirkung des Planeten mit dem Sonnenwind entsteht (also das Gesamtmagnetfeld abzüglich des planetaren Dipolfeldes), wurde auf einer dichte-

ten Kugelschale auf der Planetenoberfläche ausgegeben. Diese Daten konnten dann einer sphärisch harmonischen Analyse inklusive Trennung nach internen und externen Anteilen (mittels der Integralmethode, s. Kapitel 2.3) unterzogen werden. Dabei sind die internen Anteile dann rein von außen durch den Einschaltvorgang induziert. Das Hauptaugenmerk liegt aber auf dem zu ermittelnden achsensymmetrischen externen Dipolfeld.

4.3 Ergebnisse einer Parameterstudie mit verschiedenen Dipolmomenten

Für das externe Feld ergibt sich eine räumliche Verteilung wie sie in Abbildung 4.2 dargestellt ist. Je nach eingestelltem Dipolmoment variieren die magnetosphärischen Strukturen. So verändert sich zum Beispiel die Magnetopausenlage und die Lage der Neutralschicht. Das externe Feld ist generell auf der Tagseite des Planeten am stärksten und schwächt sich zur Nachtseite hin ab. Des Weiteren ist an den *Cusp*-Regionen eine Konzentration des externen Feldes zu verzeichnen. Mit zunehmenden internen Magnetfeld vergrößert sich die Ausdehnung der Magnetosphäre. Aber in dem hier betrachteten Bereich der internen Dipolkoeffizienten verändert sich die Struktur als auch die Stärke des externen Feldes nicht wesentlich, so lange die Magnetopause nicht durch die Planetenoberfläche gestört wird. Auch die Stromdichte auf der Magnetopause (ebenfalls in Abbildung 4.2 dargestellt) ist in den Simulationen vom Betrag und Struktur relativ konstant - lediglich der Gesamtstrom auf der Magnetopause nimmt mit dem internen Dipolmoment zu, da sich die Magnetopause vergrößert.

Beispielhaft sind in den Abbildungen 4.3 (internes Feld: 500 nT) und 4.4 (internes Feld: 200 nT) die zeitliche Entwicklung ausgewählter Gauss-Koeffizienten dargestellt. Nach einem kurzen Einschwingvorgang erreichen die Simulationen nach ca. 8 Minuten Realzeit einen in etwa stationären Zustand. Das externe homogene Feld beginnt mit einem Wert von 21 nT (durch das interplanetare Magnetfeld vorgegeben) und erreicht gegen Ende der Simulation fast 60 nT. Die anderen externen Multipole (höheren Grades) spielen mit einer Stärke von weniger als einem Zehntel vom externen Dipol eine untergeordnete Rolle. Erstaunlicherweise ergeben sich in den Simulationen mit unterschiedlichem internen Feld sehr ähnliche externe Gauss-Koeffizienten (mit einer Differenz von weniger als 1 nT), obwohl sich die Ausmaße und Strukturen der Magnetosphären deutlich unterscheiden. Die im Mantel induzierten Magnetfelder, die auf der Oberfläche als interne Multipole erscheinen, sind nur sehr schwach (vgl. dazu die Gauss-Koeffizienten $g_{1,int}^0$ und $g_{2,int}^1$ in den Abbildungen 4.3 und 4.4).

Die eigentliche Antwortfunktion ist in Abbildung 4.5 gezeigt. Dort ist der externe Dipolkoeffizient (gemittelt über die letzten 10 gespeicherten Zeitschritte der jeweiligen Simulation) als Funktion des internen dargestellt. Für große interne Felder strebt die Antwortfunktion gegen eine Konstante, in etwa 59 nT. Für kleinere interne Felder steigt die Antwortfunktion leicht an und erreicht mit 63 nT ein Maximum. Für verschwindend kleine interne Felder ist die Antwortfunktion nicht Null, wie man vielleicht erwarten würde, sondern strebt einem endlichen Wert von ca. 49 nT entgegen. Der Anstieg bei kleinen internen Feldern ($g_{1,int}^0 < 100$ nT) und der endliche Wert bei verschwindendem internen Feld lässt auf einen Einfluss des aufgestauten interplanetaren Magnetfeldes in der *Magnetosheath* schließen. Die Magnetopause ist dabei so klein, dass ein Teil von ihr tagseitig mit

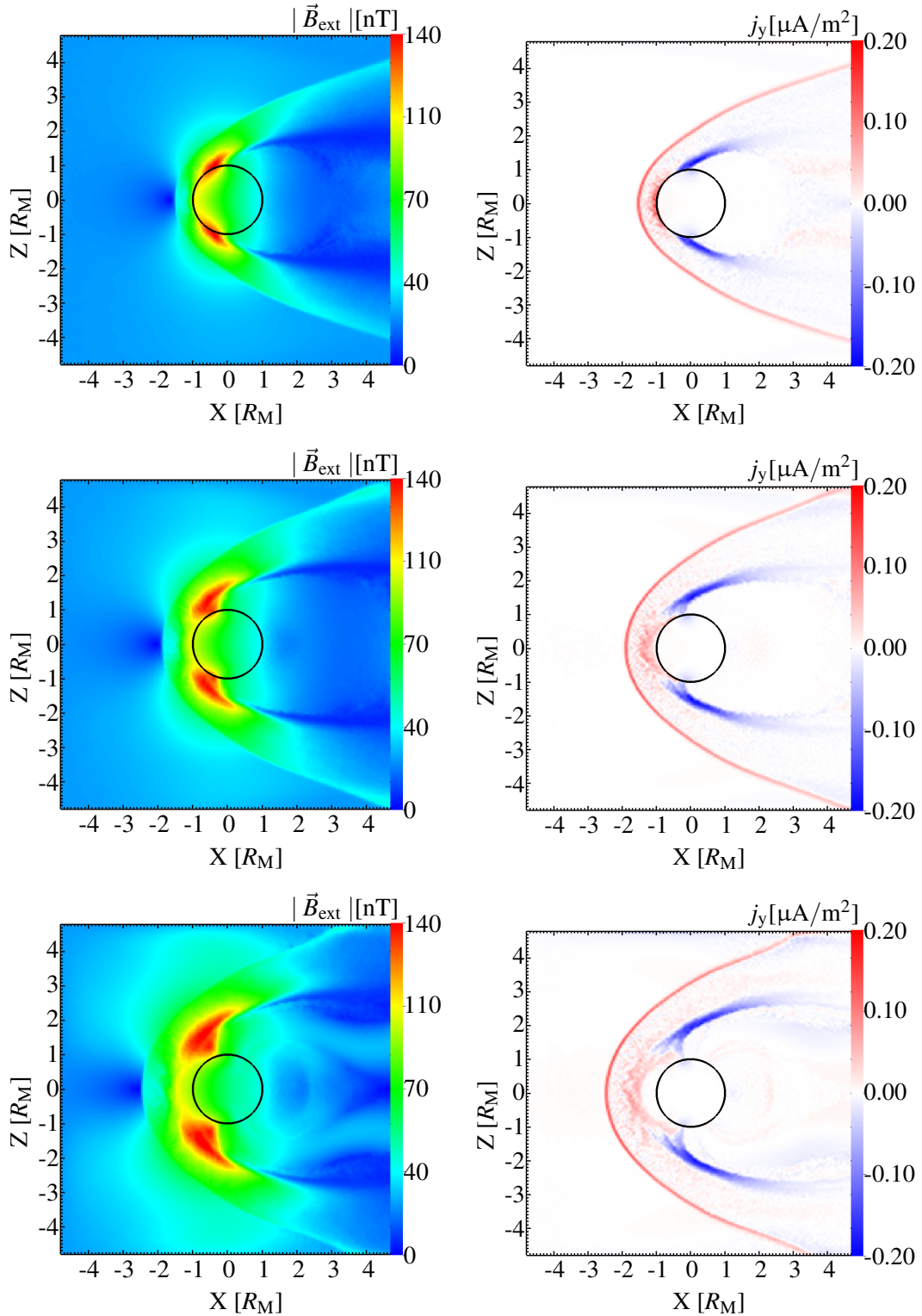


Abbildung 4.2: Externes Magnetfeld (links) und elektrische Stromdichte (rechts) in der $Y = 0$ - Schnittebene nach 20000 Zeitschritten für die internen Dipolstärken von 100 nT (oben), 200 nT (mitte) und 400 nT (unten). Der Planet ist als Kreis markiert.

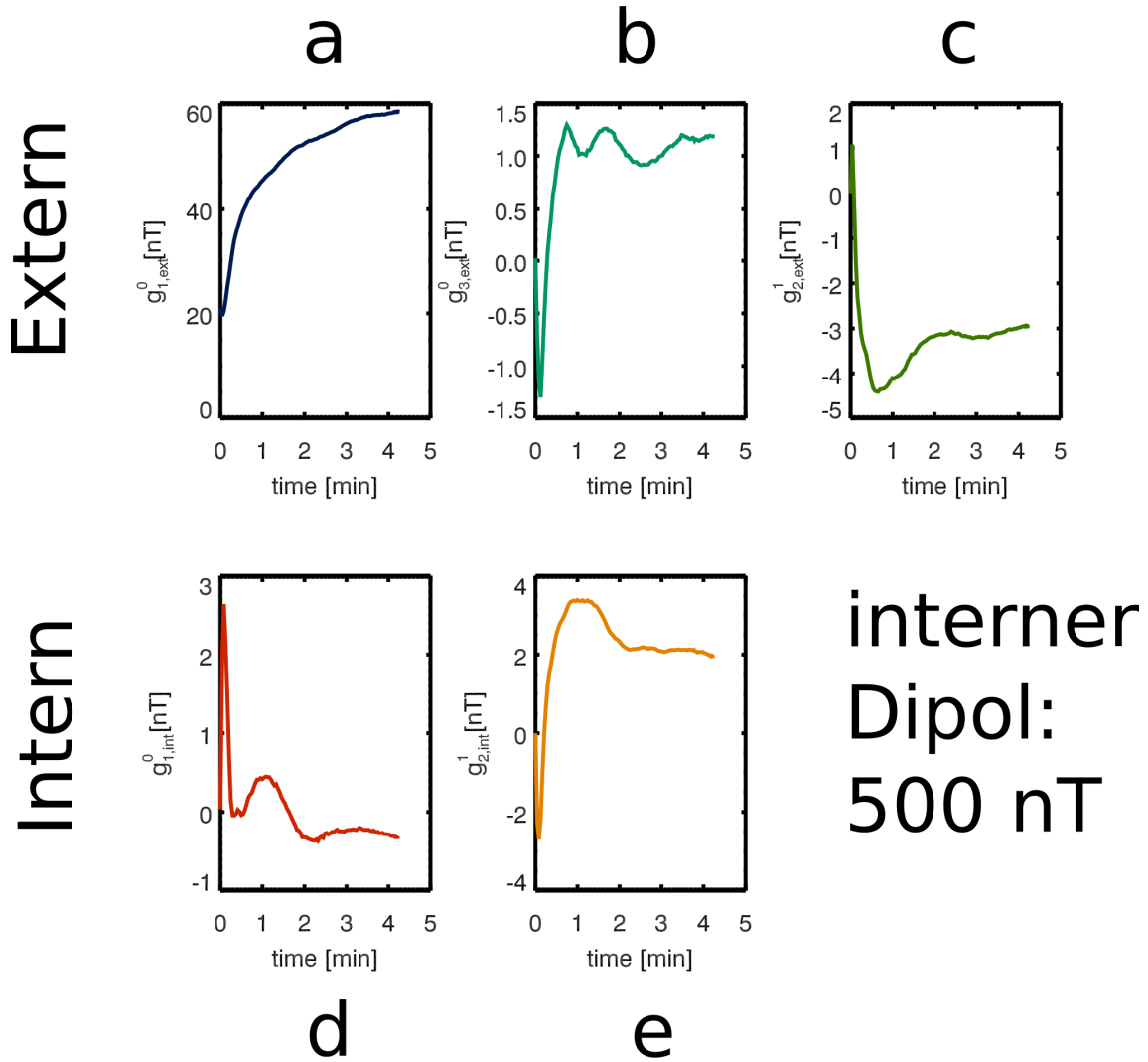


Abbildung 4.3: Ergebnisse der sphärisch-harmonischen Analyse der Magnetfeld-daten aus Hybridsimulation 81. Als planetares Dipolfeld wurde ein Feld von 500 nT angenommen. In den Einzelgrafiken ist die zeitliche Entwicklung des

- a : externen homogenen Feldes ($g_{1,ext}^0$) parallel zur Z-Achse
- b : externen, achsensymmetrischen Oktupol-Feldes ($g_{3,ext}^0$)
- c : externen, nicht-achsensymmetrischen Quadrupol-Feldes ($g_{2,ext}^1$)
- d : quasi-internen, achsensymmetrischen Dipol-Feldes ($g_{1,int}^1$)
- e : quasi-internen, nicht-achsensymmetrischen Quadrupol-Feldes ($g_{2,int}^1$)

gezeigt.

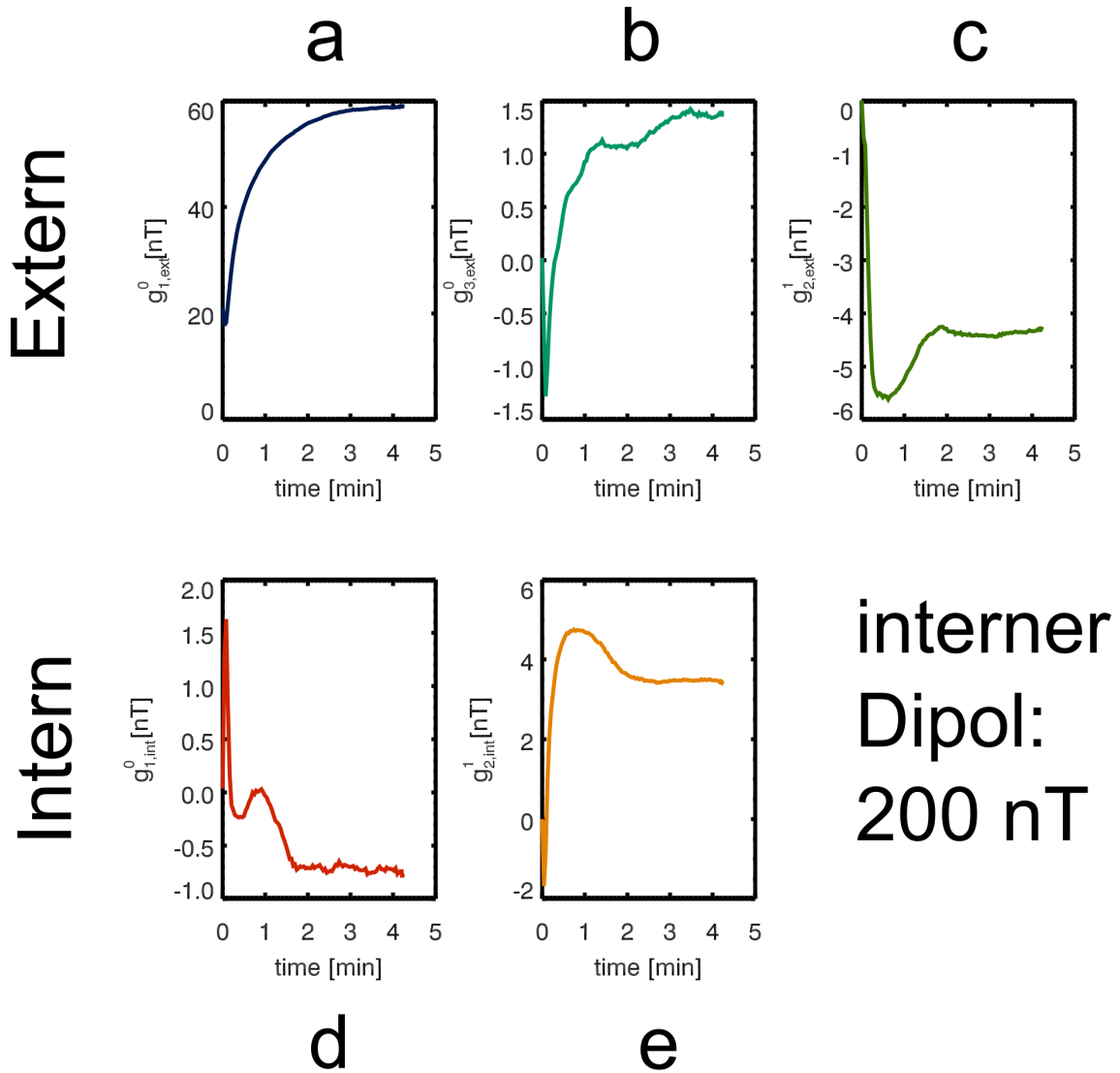


Abbildung 4.4: Ergebnisse der sphärisch-harmonischen Analyse der Magnetfeld-daten aus Hybridsimulation 94. Als planetares Dipolfeld wurde ein Feld von 200 nT angenommen. In den Einzelgrafiken ist die zeitliche Entwicklung des

- a : externen homogenen Feldes ($g_{1,ext}^0$) parallel zur Z-Achse
- b : externen, achsensymmetrischen Oktupol-Feldes ($g_{3,ext}^0$)
- c : externen, nicht-achsensymmetrischen Quadrupol-Feldes ($g_{2,ext}^1$)
- d : quasi-internen, achsensymmetrischen Dipol-Feldes ($g_{1,int}^1$)
- e : quasi-internen, nicht-achsensymmetrischen Quadrupol-Feldes ($g_{2,int}^1$)

gezeigt.

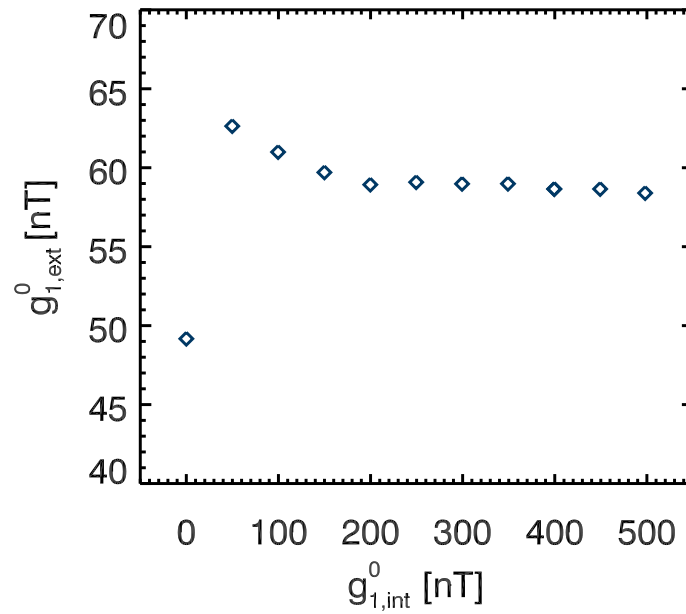


Abbildung 4.5: Antwortfunktion als Ergebnis der Hybridsimulationen. Dargestellt ist der externe Dipolkoeffizient als Funktion des internen.

dem Planeten überlappt und die *Magnetosheath* in direktem Kontakt zur Planetenoberfläche steht. Bei der harmonischen Analyse wird nicht zwischen dem magnetosphärischen Feld und dem *Magnetosheath*-Feld unterschieden.

4.4 Lage und Ausprägung des Neutralschichtstroms

In Abbildung 4.2 sind die Magnetopausenströme gut zu erkennen, aber die Stromsysteme auf der Nachtseite nicht. In den Simulationen variiert die Neutralschicht und damit auch der Neutralschichtstrom deutlich. Die eingefangene Teilchenpopulation, die den partiellen Ringstrom bildet, ist ebenfalls zeitlichen Änderungen unterworfen. Für einen Eindruck in diese Stromsysteme zu bekommen, sind in Abbildung 4.6 für die Simulation mit dem internen Dipolkoeffizienten $g_{1,int}^0 = 200$ nT die zeitlich gemittelten Ströme (über die letzten 10000 Zeitschritte der Simulation) in der Querschnittsebene $Y = 0$ dargestellt.

Wie man erkennt, sind die Ströme auf der Magnetopause in der Nähe des Planeten weitaus ausgeprägter als die Ströme auf der Nachtseite. Trotz der geringen Entfernung des Neutralschichtstroms zum Planeten ($2,1R_M$ in der Simulation mit $g_{1,int}^0 = 200$ nT) ist der Einfluss des Neutralschichtstroms auf den mittleren externen Dipol gering. In dem TS04-Modell (vgl. Kapitel 3.5) ist der Einfluss des Neutralschichtstroms also überschätzt. Die Modellierungen mit dem TS96-Modell (vgl. Kapitel 3.5) liefern ein ähnlich starken externen Dipol. Aber der Abstand des Neutralschichtstroms zum Planeten (eine subsolare Magnetopausendistanz) erscheint in diesem Modell nicht korrekt, da in der Simulation mit $g_{1,int}^0 = 200$ nT die subsolare Magnetopausendistanz gerade $1,3R_M$ beträgt.

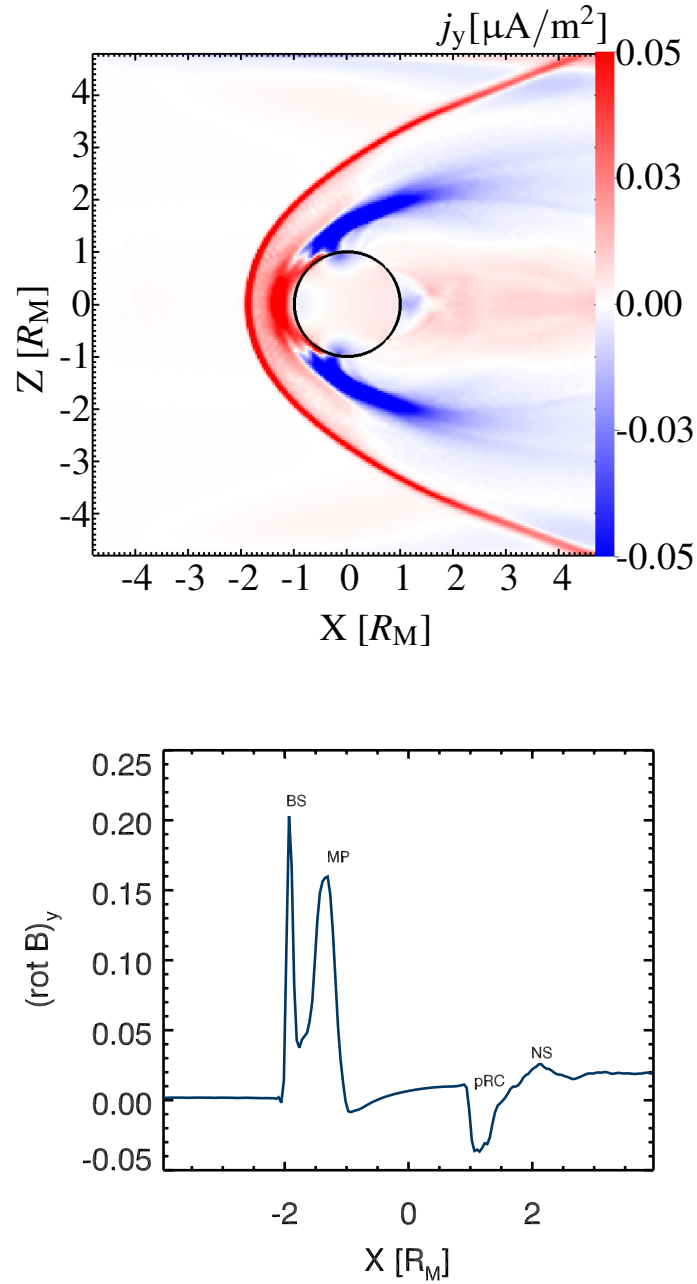


Abbildung 4.6: *Oben*: Querschnitt ($Y = 0$) durch die zeitlich gemittelten Simulationsdaten für die Y -Komponente der Stromdichte. Um die nachtseitigen Ströme zu betonen, wurde die Farbskala auf kleinere Werte angepasst im Vergleich zu Abbildung 4.2. Das extrahierte Stromprofil (*unten*) ist auf der X -Achse entnommen. In dem Profil sind die Bugstoßwelle (BS), die sub-solare Magnetopause (MP), der partielle Ringstrom (pRC) und der Beginn des Neutralschichtstroms (NS) gekennzeichnet.

Tabelle 4.2: Vergleich der Modellierungsergebnisse mit den Formen der Magnetopause (MP) mit den Simulationsergebnissen: Art der Konvergenz und Grenzwert für große interne Dipolfelder.

Modell	Konvergenz	Grenzwert [nT]
Planare MP	konstant	10,8
Ringförmige MP	hyperbolisch	0
Kugelförmige MP	konstant	115
TS96	konstant	60
TS04	konstant	20
Parabolische MP, standard	konstant	55
Parabolische MP, semi-empirisch	Wurzelfunktion	>70
Hybrid-Simulation	konstant	59

4.5 Vergleich der Modell- und Simulationsergebnisse

Die Vielzahl an Magnetosphärenmodellen (siehe Kapitel 3) und die Hybrid-Simulation liefern z.T. sehr unterschiedliche Ergebnisse für die magnetosphärische Antwortfunktion. Der Konvergenztyp und die Asymptote der verschiedenen Ansätze sind in Tabelle 4.2 zusammengefasst. Die Mehrzahl dieser Ansätze zeigt eine konstante Asymptote für große interne Dipolfelder. Dies ist mit der Argumentation auf Basis der Energieerhaltung am Ende des Kapitels 3.4 zu erklären. Die Grenzwerte der externen Dipolfelder sind allerdings recht unterschiedlich. Die Hybridsimulation zeigt einen Grenzwert von 59 nT während die Magnetosphärenmodelle Grenzwerte zwischen 0 und 115 nT aufweisen. Dies ist wahrscheinlich darauf zurückzuführen, dass die Magnetosphärenmodelle mehr oder weniger realistisch sind. Die Form der Magnetopause, die zwischen den Modellen stark variierte, bestimmt die Nähe der Magnetopausenströme zur Planetenoberfläche und damit die Stärke des externen Feldes. Zusätzlich fließt auch die Abschätzung der subsolaren Magnetopausendistanz in den Grenzwert mit ein. Nicht zuletzt verändert auch der Neutralschichtstrom die Amplitude des Inversionsergebnisses. All diese Aspekte könnten die Breite der Modellergebnisse erklären. Der Erfolg des TS96- und TS04-Modells in anderen Bereichen der terrestrischen Magnetosphärenphysik lässt es lohnenswert erscheinen, in der Zukunft auf der Basis der MESSENGER- und BepiColombo-Daten ein ellipsoidales Magnetosphärenmodell speziell für den Merkur zu entwickeln.

4.6 Ausblick auf zukünftige Hybridsimulationenstudien

Die Parameterstudie mit den Hybridsimulationen hat die Annahme einer konstanten Antwortfunktion für große interne Felder bestätigt. Es gibt eine Reihe von Möglichkeiten, wie die Hybridsimulationen in Zukunft verwendet werden können.

Mit Hilfe der Hybridsimulationen kann in Zukunft untersucht werden, welchen Einfluss die Mantelleitfähigkeit auf die Antwortfunktion hat. Auf Grund von Druckschwan-

kungen im Sonnenwind werden im Mantel Ströme induziert, die wiederum das effektive interne Dipolmoment des Planeten modifizieren. Da der Merkur einen relativ stark elliptischen Orbit besitzt, kommen zu den kurzzeitigen Druckschwankungen des Sonnenwindes auch periodische Druckschwankungen. Letztere sollten auch ein periodisch variierendes, induziertes Magnetfeld hervorrufen.

Bei sehr schwachen internen Feldern überlappt ein Teil der Magnetopause mit der Planetenoberfläche. In Zukunft sollte geklärt werden, welcher Teil des Planeten sich im Sonnenwind und welcher sich in der Magnetosphäre befindet. Der Anteil des Magnetfeldes vom Sonnenwind fluktuiert stark (verglichen mit den Zeitskalen des Dynamos) und trägt damit nicht zum langzeitgemittelten Feld bei. Um diesen Anteil herauszufiltern, muss die Schnittlinie der Magnetopause mit der Planetenoberfläche ermittelt werden.

Die Lage des Neutralschichtstroms in Abhängigkeit vom internen Dipolmoment könnte in einer zukünftigen Studie bestimmt werden. Dazu sollten dann auch Simulationen mit höherer Auflösung bzw. variabler Auflösung verwendet werden. Die Lage des Neutralschichtstroms besitzt einen Einfluss auf das Druckgleichgewicht an der Magnetopause und damit auf das *Flaring*. Bei der Verallgemeinerung des Feedbackmodells, besonders bei einer großen Bandbreite des Sonnenwinddruckes, kann dem *Flaring* eine größere Bedeutung zukommen.

Für eine abschließende Einschätzung der Antwortfunktion sollten in Zukunft auch stärkere interne Felder untersucht werden. Aber auf Grund der beträchtlichen Größe der Magnetosphäre und des damit verbundenen Rechenaufwands sollte für diese Simulationen mit $g_{1,\text{int}}^0 > 500$ nT eventuell eine reine MHD-Simulation verwendet werden.

Eine andere Erweiterung der Sonnenwind-Modellierung betrifft die Polumkehr des Dynamos. Bevor es zu einer vollständigen Dipolumkehr kommt, nehmen die höheren Multipole zu. Es kann auch sein, dass sich die Dipolachse zunächst dem Äquator zuneigt. Diese Effekte werden bisher von den Modellierungen nicht erfasst und sollten in Zukunft auch untersucht werden.

5 Kernentwicklung und Dynamotheorie

5.1 Die Induktionsgleichung als Grundlage der Dynamotheorie

Ein Dynamo ist ein System, das, ausgehend von einem Saatzfeld, durch Bewegung von elektrisch leitfähiger Materie, ein eigenes Magnetfeld aufrecht erhält. Dabei werden elektrische Ströme induziert und kinetische in magnetische Energie umgewandelt. Die Dynamos in astrophysikalischen Körpern unterscheiden sich grundlegend von den allgemein bekannten, technischen Dynamos, da in ihnen keine Spulen oder Drähte vorhanden sind, die den Strom in geeigneter Weise lenken. Dynamoeffekte treten in der Natur zum Beispiel bei der Sonne, den Gasplaneten, der Erde und beim Merkur auf. Selbst auf so großen Skalen wie Galaxien laufen Dynamoprozesse ab. Die internen Strömungsprozesse unterscheiden sich bei den verschiedenen Himmelskörpern jedoch stark. Für einen Einblick in die Vielzahl von verschiedenen Systeme seien hier z.B. die Bücher Cardin und Cugliandolo (2008), Rüdiger und Hollerbach (2006), Schubert (2007) genannt. Die folgende Darstellung ist in diesen Büchern enthalten, soll aber der Vollständigkeit halber hier kurz gezeigt werden.

Zur Beschreibung von Dynamos in magnetohydrodynamischen Systemen ist die Induktionsgleichung von zentraler Bedeutung.

Aus dem Induktionsgesetz

$$\partial_t \underline{B} = -\underline{\nabla} \times \underline{E} \quad (5.1)$$

folgt mit dem Ohmschen und dem Ampèreschen Gesetz (unter Vernachlässigung der Verschiebungsströme)

$$\partial_t \underline{B} = -\underline{\nabla} \times \left(\frac{\underline{j}}{\sigma} - \underline{v} \times \underline{B} \right) = -\underline{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0 \sigma} \underline{\nabla} \times \underline{B} - \underline{v} \times \underline{B} \right) \quad (5.2)$$

Bei homogener und isotroper Leitfähigkeit folgt daraus die Induktionsgleichung

$$\partial_t \underline{B} = \underline{\nabla} \times (\underline{v} \times \underline{B}) + \eta \Delta \underline{B} \quad (5.3)$$

Hierbei ist $\eta = 1/\sigma\mu_0$ die magnetische Diffusivitätskonstante. Der zweite Summand auf der rechten Seite der Induktionsgleichung beschreibt den Zerfall bzw. die Diffusion des Magnetfeldes, während der linke die Feldgenerierung durch das Strömungsfeld \underline{v} beschreibt. Ein Dynamo liegt also vor, wenn bei dieser Konkurrenzsituation zwischen

Zerfall und Erzeugung, letzteres stärker ist. Zur Beurteilung wie effizient ein Dynamo arbeitet, kann die sog. magnetische Reynoldszahl

$$Rm = \frac{|\underline{\nabla} \times (\underline{v} \times \underline{B})|}{|\eta \Delta \underline{B}|} \approx \frac{\frac{1}{D_0} v_0}{\eta \frac{1}{D_0^2}} = \frac{v_0 D_0}{\eta} \quad (5.4)$$

herangezogen werden. Hierbei sind v_0 und D_0 die charakteristische Geschwindigkeit und Länge innerhalb des betrachteten Systems. Je nach System ergibt sich eine kritische magnetische Reynoldszahl, ab der ein Dynamo existieren kann. Das Magnetfeld selbst (bzw. die Stärke des Saatfeldes) kommt nicht in der Definition der magnetischen Reynoldszahl vor - die Effizienz des Dynamoprozesses ist also in der kinematischen Theorie unabhängig von der Stärke des Magnetfeldes. Ein infinitesimal kleines Saatfeld reicht demnach aus, um einen Dynamoprozess zu initiieren. Für einen Dynamo muss mindestens $Rm > 1$ gelten. In Cardin und Cugliandolo (2008) ist beschrieben, wie allgemein die kritische Rm auf π (Childress-Schwellwert) bzw. π^2 (Backus-Schwellwert) abgeschätzt werden kann. In den dreidimensionalen numerischen Simulationen hat sich gezeigt, dass kritische magnetische Reynoldszahl für planetare Dynamos ca. 50 beträgt (Wicht et al. 2007, Schubert 2007). Wenn die magnetische Reynoldszahl zu klein ist, kann das System zwar ein von außen vorgegebenes Saatfeld modifizieren, aber nicht auf Dauer aufrecht erhalten. Wenn das äußere Saatfeld abgeschaltet wird, zerfällt das Magnetfeld - man spricht dann von Magnetokonvektion.

Wenn die elektrische Leitfähigkeit hoch bzw. unendlich ist, so divergiert auch die magnetische Reynoldszahl und das Magnetfeld zerfällt nicht. Die Induktionsgleichung reduziert sich in diesem Fall auf das hydromagnetische Theorem

$$\partial_t \underline{B} = \underline{\nabla} \times (\underline{v} \times \underline{B}) \quad (5.5)$$

bzw. das Theorem des eingefrorenen, magnetischen Flusses

$$\underline{E} = -\underline{v} \times \underline{B} \quad (5.6)$$

was gleichbedeutend mit

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad (5.7)$$

ist, wobei $\Phi = \int \underline{B} d\underline{A}$ der magnetische Fluss ist. Ebenso kann eine hohe magnetische Reynoldszahl bei hohen Geschwindigkeiten bzw. großen Systemskalen erreicht werden.

Die Frage ist aber auch, welche Arten von Strömungen geeignet sind, einen Dynamoprozess zu bewirken. Dazu kann man den Feldgenerierungsterm aufspalten:

$$\underline{\nabla} \times (\underline{v} \times \underline{B}) = \underbrace{\underline{v}(\underline{\nabla} \cdot \underline{B})}_{=0} - \underbrace{\underline{B}(\underline{\nabla} \cdot \underline{v})}_{=0} + \underbrace{(\underline{B} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v}}_{\text{Scherung \& Streckung}} - \underbrace{(\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{B}}_{\text{Advektion}} \quad (5.8)$$

Hierbei wurde ein inkompressibles Medium $\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$ vorausgesetzt. Diese Gleichung zeigt, dass es einer Scherung in der Strömung bedarf, um das Magnetfeld zu generieren bzw. zu verstärken, sonst wird das Magnetfeld nur advektiert. Wenn das Theorem des eingefrorenen Flusses gilt, dann lässt sich die Dynamowirkung anschaulich an einer Flussröhre erklären (siehe Abbildung 5.1). Wenn eine Strömung eine Flussröhre der Länge l und der Querschnittsfläche A , der ein Magnetfeld B verhaftet ist, in die Länge zieht,

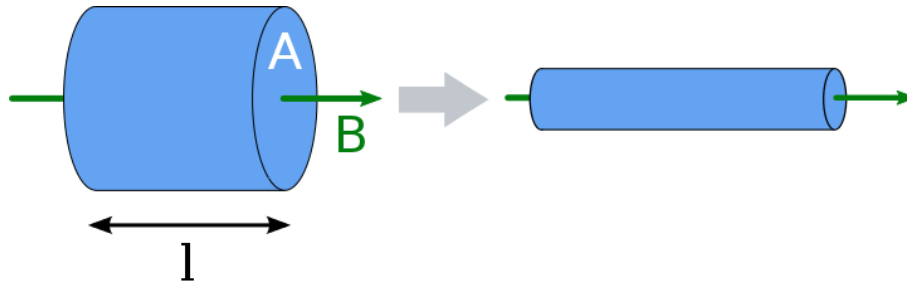


Abbildung 5.1: Schema der Verlängerung einer Flussröhre (blau) der Länge l und Querschnittsfläche A , die von einem Magnetfeld B durchsetzt ist.

muss sich unter Erhaltung des Volumens die Querschnittsfläche verkleinern. Der magnetische Fluss $A \cdot B$ muss genauso wie das Volumen $A \cdot l$ konstant bleiben. Daraus folgt, dass das Magnetfeld proportional zu l ist und damit bei einer Verlängerung der Flussröhre verstärkt wird.

Bei den Modellierungen unterscheidet man zwischen dem kinematischen und dem dynamischen Bild. Bei einem kinematischen Dynamo ist die Bewegung bzw. Strömung fest vorgegeben und man betrachtet nur noch die Induktionsgleichung. Im dynamischen Bild lässt man die Rückwirkung des Magnetfeldes auf die Bewegung durch die Lorentzkraft zu, und es muss zusätzlich zur Induktionsgleichung auch die Navier-Stokes-Gleichung betrachtet werden. Die Strömung \underline{v} stellt im kinematischen Bild einen unerschöpflichen Energievorrat bereit, aus dem magnetische Energie erzeugt wird. Es stellt sich die Frage, woher in Realität diese Energie kommt und wie sie eventuell (außerhalb des kinematischen Bildes) doch begrenzt sein kann. Dazu kann der Feldgenerierungsterm energetisch betrachtet werden. Multiplikation der Induktionsgleichung (5.3) mit \underline{B}/μ_0 ergibt die zeitliche Änderung der lokalen magnetischen Energiedichte $\partial_t E_m$:

$$\frac{1}{2\mu_0} \partial_t B^2 = \partial_t E_m = \underline{j} \cdot (\underline{v} \times \underline{B}) = -\underline{v} \cdot (\underline{j} \times \underline{B}) \quad . \quad (5.9)$$

Vergleicht man das Ergebnis mit der zeitlichen Änderung der kinetischen Energiedichte $\partial_t E_k$ durch die Lorentzkraft (Multiplizieren der Navier-Stokes-Gleichung mit \underline{v}):

$$\frac{\rho_m}{2} \partial_t v^2 = \partial_t E_k = \underline{v} \cdot (\underline{j} \times \underline{B}) \quad , \quad (5.10)$$

so erkennt man, dass die Arbeit gegen die Lorentzkraft in die Magnetfeldverstärkung fließt.

In Abwesenheit einer Strömung reduziert sich die Induktionsgleichung auf eine reine Diffusionsgleichung

$$\partial_t \underline{B} = \eta \Delta \underline{B} \quad . \quad (5.11)$$

Die typische Zeitskala, die sich aus dieser Gleichung ergibt, ist die sog. magnetische Diffusionszeitskala

$$\tau_\eta = D_0^2 / \eta \quad . \quad (5.12)$$

Sie beschreibt die diffusive Ausbreitung eines Feldes der Skala D_0 .

Die magnetische Diffusion sollte man aber nicht nur auf die magnetfeldvermindernde Eigenschaft reduzieren. Ein bekannter Diffusionsprozess ist die Rekonnektion in der Magnetohydrodynamik, die eine endliche elektrische Leitfähigkeit voraussetzt. Außerdem

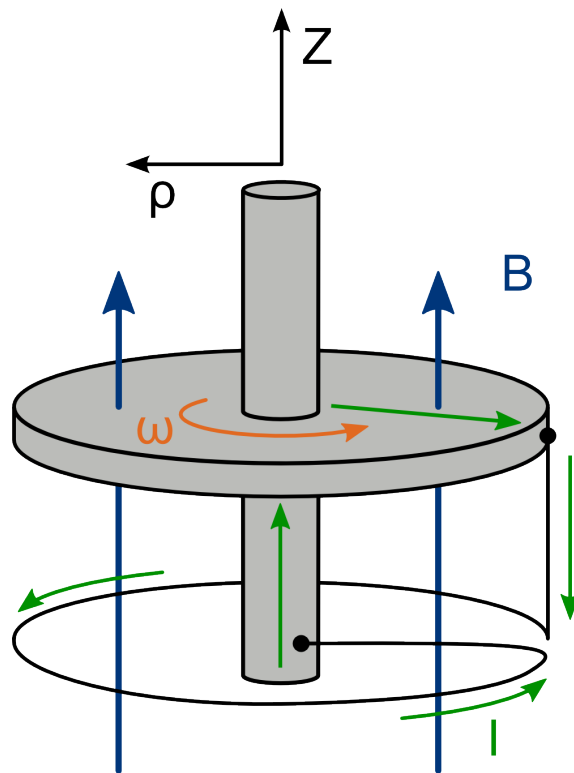


Abbildung 5.2: Der Scheibendynamo nach Bullard (1978). In der Mitte des Bildes dreht sich eine Kreisscheibe mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Die Drehstange und das Magnetfeld (blau) sind parallel zur Z -Achse. Durch die Induktionswirkung fließt ein Strom (grün), der am Rand der Kreisscheibe abgeführt und in eine Spule unterhalb der Kreisscheibe eingeleitet wird. Die Spule ist ebenfalls an die Drehachse angeschlossen und erzeugt das Magnetfeld, das wiederum die Grundlage für den Induktionsprozess darstellt.

wird Rekonnektion als ein Antidynamoprozess bezeichnet, da sie magnetische in kinetische Energie umwandelt. Mit der Rekonnektion ist es möglich, Energie von kleinen magnetischen Skalen hin zu größeren zu transportieren - man spricht dann von einer inversen Energiekaskade. Bei planetaren Dynamos scheint nach Buffett und Bloxham (2002) dieser inverser Energietransport eine entscheidende Rolle für die Erzeugung des Dipolfeldes einzunehmen.

5.2 Der Scheibendynamo

Zur Veranschaulichung einiger Aspekte der Dynamotheorie, lässt sich das Scheibendynamomodell nach Bullard (1978) studieren. Dies stellt einen einfachen technischen Dynamo dar. Der Aufbau des Dynamos ist in Abbildung 5.2 gezeigt. Eine dünne, leitfähige Scheibe mit Radius a wird über eine zentrale Drehstange in Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = v/\rho$ versetzt. Unterhalb der Scheibe befindet sich eine Spule mit N Wicklungen, Querschnittsfläche A , Induktivität L und Ohmschen Widerstand R deren Schleifenschlüsse mit dem Rand der Scheibe und der Drehstange in der Mitte verbunden sind. In einem

homogenen Magnetfeld $B_z = B$, das parallel zu Achse gerichtet sei, wird eine Spannung

$$U = \int_0^a \underline{E} \cdot d\underline{\rho} = - \int_0^a \underline{v} \times \underline{B} \cdot d\underline{\rho} = - \int_0^a \omega \rho B d\rho = -\frac{1}{2} B \omega a^2 \quad (5.13)$$

zwischen Drehstange und Rand erzeugt. Diese Spannung treibt einen Strom I durch den Draht und die Spule. Das Magnetfeld der Spule (das hier im Modell ohne geometrische Abschwächung direkt an die Scheibe anliegen soll) lässt sich durch

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{NLI}{\pi a^2} \quad (5.14)$$

berechnen. Nach der Kirchhoffschen Maschenregel gilt

$$\begin{aligned} L\dot{I} + RI &= \frac{1}{2} B \omega a^2 = \frac{NL}{2\pi} \omega I \\ \dot{I} &= (C_2 N \omega - C_1) I \end{aligned} \quad (5.15)$$

mit $C_1 = R/L$ und $C_2 = 1/2\pi$. Die Windungszahl N wurde zwecks späterer Verwendung im Kapitel 6.5 nicht in die Konstante eingebracht. Betrachtet man nur den kinematischen Fall, also $\omega = \text{const}$, dann liefert ein Lösungsansatz $I(t) = I_0 \exp(\lambda t)$ den Eigenwert $\lambda = C_2 N \omega - C_1$. Man erhält ein ungebremstes Anwachsen des Stromes wenn $C_2 N \omega > C_1$ und einen zeitlichen Zerfall wenn $C_2 N \omega < C_1$. Hieraus wird deutlich, dass es einer gewissen Drehgeschwindigkeit und einer speziellen Wicklungsrichtung der Spule bedarf, um das Magnetfeld des Dynamos dauerhaft zu erhalten. Diese Tatsache fügt sich in das Bild ein, dass über die Diskussion der Induktionsgleichung und der magnetischen Reynoldszahl in Kapitel 5.1 gewonnen worden ist.

Lässt man im Modell eine variable Drehgeschwindigkeit zu, dann wird die Kreisscheibe durch die Lorentzkraft ausgebremst. Der Stromfluss sei als gradlinig und filamentartig angenommen, so dass sich die Lorentzkraft

$$F_{\text{Lorentz}} = I \int_0^a d\underline{r} \times \underline{B} = I a B \quad (5.16)$$

und mit Gl. (5.14) das durch diese Kraft wirkende Drehmoment

$$D_{\text{Lorentz}} = I a^2 B = \frac{NL}{\pi} I^2 \quad (5.17)$$

ergeben. Das antreibende Moment auf der Drehstange sei $D_{\text{Motor}} = \text{const}$. Mit der Lenz'schen Regel und dem Trägheitsmoment der Kreisscheibe Θ ergibt sich die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \Theta \dot{\omega} &= D_{\text{Motor}} - D_{\text{Lorentz}} \\ \dot{\omega} &= C_3 - N C_4 I^2 \end{aligned} \quad (5.18)$$

mit $C_3 = D_{\text{Motor}}/\Theta$ und $C_4 = NL/(\pi\Theta)$. Insgesamt muss also ein nicht-lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{I} &= (C_2 N \omega - C_1) I \\ \dot{\omega} &= C_3 - N C_4 I^2 \end{aligned} \quad (5.19)$$

gelöst werden. Dieses Gleichungssystem lässt sich über die Definitionen

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\tilde{I}}{C_1} \\
t &= \frac{\tilde{t}}{C_1} \\
\omega &= \frac{C_3}{C_1} \\
\tilde{I} &= \sqrt{\frac{C_3 C_1^2}{C_4}} \tilde{I} \\
P &= \frac{C_2 C_3}{C_1^2}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

umformulieren:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{I}} &= (PN\tilde{\omega} - 1)\tilde{I} \\
\dot{\tilde{\omega}} &= 1 - N\tilde{I}^2
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Im folgenden werden alle \sim weggelassen. Für das Modell mit einer Spulenschleife ($N = 1$) gibt es nur noch einen Kontrollparameter P . Ein stationärer Zustand mit $d/dt = 0$ ergibt sich für $I = 1$ und $\omega = 1/P$. Das Gleichungssystem lässt sich z.B. mit dem Runge-Kutta-Verfahren zeitlich integrieren. Für einen überkritischen Kontrollparameter $P = 500$ ist die so ermittelte zeitliche Entwicklung des Systems in Abb. 5.3 abgebildet. Hierbei ist

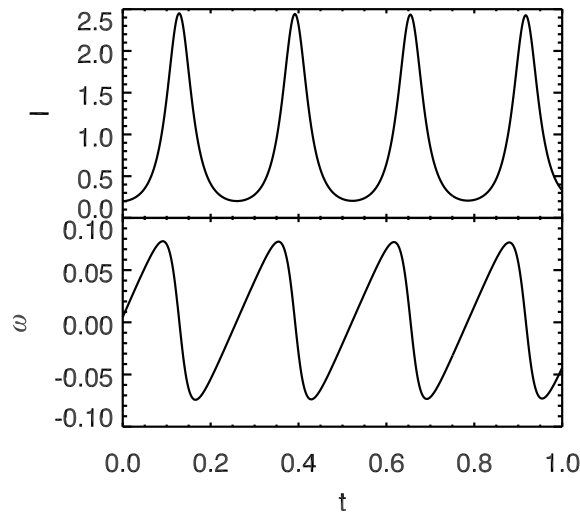


Abbildung 5.3: Zeitliche Entwicklung des Spulenstromes I (oben) und der Rotationsgeschwindigkeit ω (unten) in dimensionslosen Einheiten für einen Kontrollparameter $P = 500$.

zu erkennen, dass der Spulenstrom quadratisch während die Rotationsgeschwindigkeit linear anwächst. Ab einem bestimmten Level begrenzt die Lorentzkraft das Wachstum und lässt sogar die Scheibe andersherum drehen. Dann kann die Stärke des Dynamos wieder anwachsen und der Zyklus beginnt von neuem.

5.3 Planetare Dynamos

In unserem Sonnensystem besitzen die Gesteinsplaneten Merkur und Erde ein Magnetfeld ebenso wie die vier Gasriesen Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun. Das Magnetfeld des Jupitermonds Ganymed wird wahrscheinlich ebenfalls von einem internen Dynamoprozess erzeugt. Eine Einführung in die Thematik der planetaren Dynamos ist zum Beispiel bei Cardin und Cugliandolo (2008) oder Schubert (2007) zu finden. Die folgende Darstellung basiert auf diesen Quellen. Die Temperaturen in den Tiefen eines Planeten übersteigen bei weitem die Curie-Temperatur der ferro-magnetischen Materialien. Außerdem ist die typische Zeitskala, in der eventuelle primordiale Magnetfelder aus dem Inneren herausdiffundieren weitaus kürzer als das Alter des Sonnensystems. Weiterhin hat sich das Magnetfeld der Erde nachweisbar über geologische Zeitskalen geändert. Das Erddipolfeld hat sich im Zuge dieser Säkularvariation mehrfach umgepol. Aus diesen Gründen muss das heutige Magnetfeld der Planeten durch einen Dynamoprozess aufrecht erhalten werden. In den terrestrischen Planeten wie der Erde und dem Merkur generieren Konvektionsbewegungen im flüssigen und leitfähigen äußeren Kern das Magnetfeld. Um die Konvektionsbewegungen in Gang zu setzen, bedarf es entweder eines überkritischen Temperatur- oder eines chemischen Kontrastes zwischen innerem Kern und Kern-Mantel-Grenze. Die möglichen Wärmequellen sind primordiale Wärme, latente Wärme durch Ausfrieren eines inneren Kerns oder volumetrische, radioaktive Wärmequellen. Ein chemischer Konzentrationsgradient kann durch das Wachstum des inneren Kerns erzeugt werden, bei dem leichte Elemente wie Schwefel oder Silizium, die ebenfalls im Eisen-Nickel-Gemisch gelöst sind, in der flüssigen Phase verbleiben. Neben der thermisch und chemischen Konvektion wird auch diskutiert, in wie weit Dynamos durch die planetare Präzession (z.B. Tilgner 2005) getrieben werden können.

Im Gegensatz zu den technischen Dynamos (vgl. Kapitel 5.2) gibt es beim Dynamoprozess in Planeten keine Drähte, die den Strom geeignet führen, um den Dynamoprozess zu optimieren. Die elektrischen Ströme werden durch Konvektion im flüssigen Kern verursacht. Diese Ströme fließen hauptsächlich in der Dynamozone, man nennt diese Art dann *homogene Dynamos*. Die Konvektionsbewegung ist auch wesentlich komplexer als die Bewegung in technischen Dynamos. Diese Komplexität drückt sich im Spektrum und der Säkularvariation aus. Interessanterweise ist für eine Umpolung nicht zwingend auch eine Änderung der Konvektionsbewegung nötig, da die Induktionsgleichung (5.3) linear bezüglich des Magnetfeldes ist. Der genaue Mechanismus der Umpolung ist noch Gegenstand aktueller Studien.

Die höhere Feldstruktur (kleinskaliger als der Dipol) ist einer komplexen zeitlichen Entwicklung unterworfen. Aus dieser Säkularvariation versucht man auch Erkenntnisse über die Strömungsbewegung in den äußeren Kernschichten zu erlangen. Die Konvektion in den tiefer liegenden Kernschichten ist zur Zeit aber noch unzugänglich für eine direkte Beobachtung. Während das äußere Magnetfeld der Erde über die letzten Jahrhunderte gut dokumentiert ist und auch das Magnetfeld von anderen Planeten inzwischen von mehreren Raumsonden untersucht wurde, bleibt doch ein großer Anteil des Magnetfeldes dem Beobachter verborgen (das toroidale Magnetfeld). Die Computersimulationen des Dynamoprozesses als magnetohydrodynamisches System gewähren hier einen Einblick in das Innere des Dynamoprozesses und damit auch in die Planeten und deren Entwicklung.

Auch wenn die numerische Auflösung um Größenordnungen von der Realität ent-

fernt und damit einhergehend die Simulationsparameter völlig unrealistisch sind, schafft man es doch, viele wesentliche Aspekte des Dynamos wie z.B. die Feldumkehr und die Säkularvariation generell abzubilden.

5.4 Evolution des Merkurkerns

Die Messungen der Libration von Merkur (Margot et al. 2007) zeigen, dass ein Teil des Kerns flüssig sein muss. Die Präsenz des Merkurmagnetfeldes deutet zudem darauf hin, dass in dieser flüssigen Schicht genug Konvektion herrscht, um einen Dynamoprozess zu treiben. Wie passt dies zu den Modellen der thermischen Entwicklung des Merkur?

Dazu haben unter anderem Williams et al. (2007) ein Modell aufgestellt. Nach gängiger Anschauung ist der planetare Kern nach dem Ausdifferenzieren sehr heiß und durch diese Wärme konvektiert der Kern am Anfang sehr stark. Dabei verliert der Planet schnell an Wärme und die rein durch die primordiale Wärme getriebene Konvektion stagniert - der Wärmetransport wird dann durch reine Wärmeleitung dominiert. Wenn die Temperatur soweit abgesunken ist, dass sich ein innerer Kern bilden kann, beginnt die Konvektion eventuell erneut. Dabei ist die latente Wärme, die beim Ausfrieren des inneren Kerns freigesetzt wird, eine wichtige Quelle für den Temperaturkontrast zwischen innerem Kern und Kern-Mantel-Grenze. Wenn außerdem im Kern ein leichtes Element wie Schwefel oder Silizium gelöst ist, erfährt die Konvektion einen zusätzlichen Antrieb durch den radialen, chemischen Konzentrationsgradienten. Radioaktive Elemente tragen zusätzlich zur Heizung des inneren Kerns bei, sind aber wahrscheinlich überall gleichmäßig verteilt.

Zur Ermittlung der Lage der Kern-Mantel-Grenze wird die Temperatur- und Druckverteilung innerhalb des Kerns bestimmt. Zusammen mit der Schmelzkurve des Eisen-Nickel-Schwefel-Gemischs ergibt sich dann der Radius des inneren Kerns als Funktion der Zeit. Dieser Prozess ist in Abbildung 5.4 schematisch dargestellt. Die Schmelzkurve wird dabei schon von wenigen Prozent Schwefelanteil bedeutend abgesenkt. Je nach innerem Kernradius kann dann eine Bilanz der Entropieproduktionsrate aufgestellt und mit der nötigen Rate für einen Dynamoprozess verglichen werden. So steigt z.B. die latente Wärmeproduktion mit der wachsenden Oberfläche des inneren Kerns. Es ist festzustellen, dass nur bei höheren Schwefelkonzentrationen über 1% überhaupt genug Leistung für einen Dynamoprozess zur Verfügung steht. Je mehr Schwefel im Kern gelöst ist, desto später setzt das Kernwachstum ein. Diese Kernentwicklungsmodelle müssen aber als Näherung betrachtet werden, da Zustandsfunktionen des Eisen-Nickel-Schwefel-Gemischs bei den hohen Kerntemperaturen und -drücken nicht einfach zu bestimmen sind. Zusätzlich kann die Konzentration von radioaktiven Elementen die Entropieproduktionsrate signifikant verändern. Außerdem beeinflusst die Art des Wärmeflusses durch den Mantel die Wärmemenge, die aus dem Kern abtransportiert werden kann. Dabei ist z.B. die genaue Viskosität des Mantelmaterials und damit der genaue Wärmetransport durch den Mantel ungewiss (Williams et al. 2007).

5.5 Bifurkation und Dynamogleichgewichte

Im äußeren Kern muss der Temperaturkontrast einen kritischen Wert überschreiten, um die Konvektion zu starten. Der Temperaturkontrast geht in die sog. Rayleigh-Zahl Ra ein.

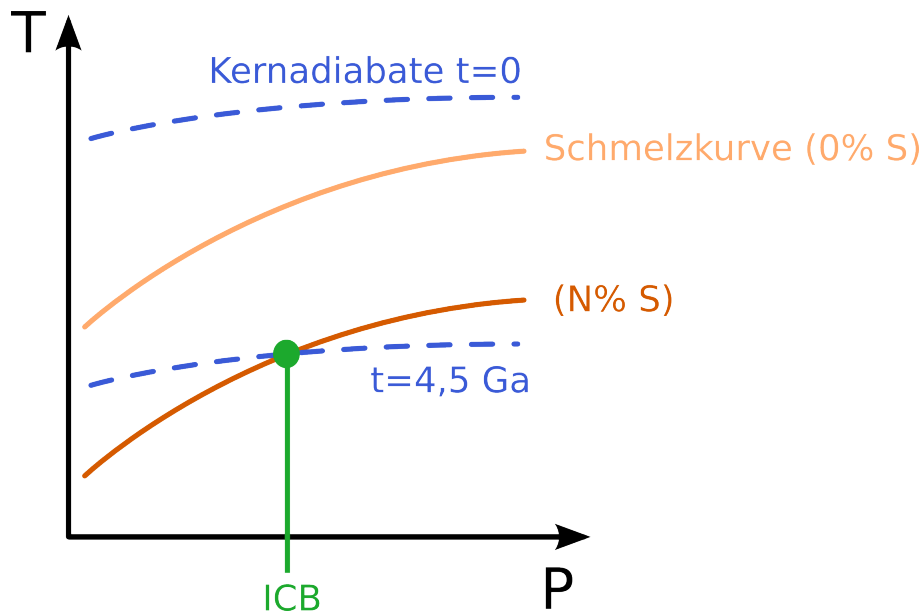


Abbildung 5.4: Kernadiabate (blau) und Schmelzkurve (orange) als Funktion des Druckes. Am Anfang ist die Temperatur überall hoch und die Kernadiabate liegt überall über der Schmelzkurve. Nach einer gewissen Abkühlung kann sich ein Schnittpunkt zwischen Kernadiabate und der Schmelzkurve ergeben. Dieser Punkt bestimmt dann die thermische Koordinate des inneren Kerns und daraus lässt sich seine Größe berechnen. Die Lage der Schmelzkurve wird unter anderem vom Schwefelanteil ($N \neq 0$) bestimmt.

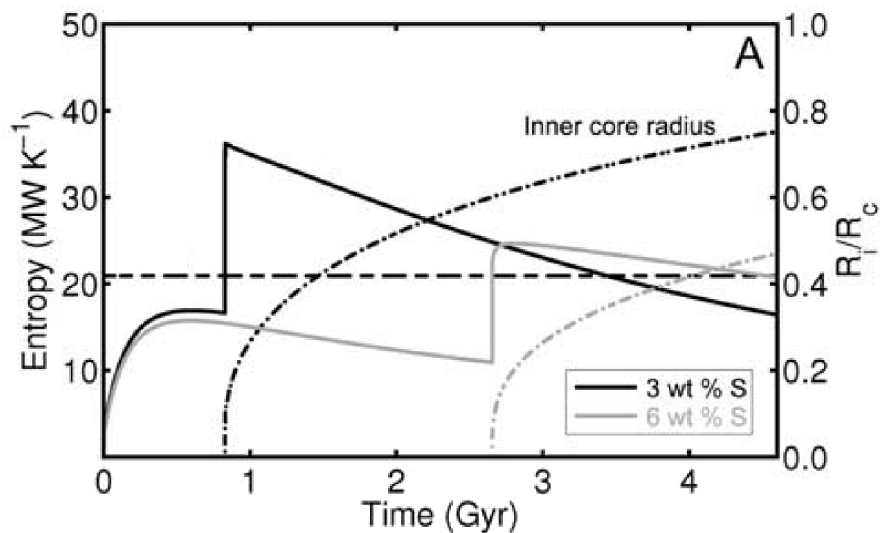


Abbildung 5.5: Entropieproduktion (linke Ordinate, durchgezogene Linien) und Radius des inneren Kerns (rechte Ordinate, strich-punkt-strich Linie) als Funktion der Zeit für verschiedene initiale Schwefelanteile (schwarz: 3 Gewichtsprozent, grau: 6 Gewichtsprozent). Die notwendige Entropieproduktion ist als waagrechte, gestrichelte Linie eingezeichnet. Abbildung aus Williams et al. (2007).

Neben diesem Kontrollparameter gibt es noch 4 weitere dimensionslose Kennzahlen, die das hier verwendete Dynamomodell charakterisieren. Die Ekman-Zahl E beschreibt das Verhältnis von viskosen Kräften zur Corioliskraft. Die Prandtl-Zahl Pr ist das Verhältnis von dynamischer Viskosität zur thermischen Diffusivität. Die magnetische Prandtl-Zahl Pm stellt das Verhältnis von dynamischer Viskosität zur magnetischen Diffusivität dar. Das Skalenverhältnis oder auch Aspektverhältnis χ zeigt die Größe des inneren Kerns skaliert auf die Kern-Mantel-Grenze an. Die genauen Definitionen dieser Zahlen werden im Zuge der Einführung in das numerische Modell in Kapitel 7.1 genannt.

In einer Studie zeigen Al-Shamali et al. (2004) wie bei einer festen Prandtl-Zahl die kritische Rayleigh-Zahl für den Beginn der Konvektion von der Ekman-Zahl und dem Aspektverhältnis abhängt. Dazu führen sie verschiedene, überkritische Simulationen durch, bestimmen die kinetische Energie und schätzen jeweils den Bifurkationspunkt ab. Dabei erhalten sie für $Pr \equiv 1$ folgendes Gesetz:

$$Ra_c = \left(\frac{0,21}{\chi^2} + 22,3 \sqrt{\frac{1-\chi}{1+\chi}} \right) \frac{1}{E^{1,16}} \quad . \quad (5.22)$$

Diese Simulationen sind aber rein hydrodynamisch.

Wenn man das magnetohydrodynamische System betrachtet, ergibt sich eine erneute Bifurkation für den Übergang eines hydrodynamischen Systems hin zu einem Dynamo. Die Art der Bifurkation ist von den Kontrollparametern E und Pm abhängig. Morin und Dormy (2009) haben mit einer Vielzahl von Dynamosimulationen die verschiedenen Arten der Bifurkation untersucht. Für große magnetische Prandtl-Zahlen und kleine Ekman-Zahlen erhält man eine superkritische Bifurkation mit nur einem Lösungsast für Rayleigh-Zahlen, die die kritische Rayleigh-Zahl für den Beginn des Dynamoprozesses (Ra_d) übersteigen. Für moderate Kontrollparameter zeigt sich eine subkritische Bifurkation. Oberhalb der Ra_d gibt es einen Bereich, in dem zwei Lösungsäste existieren: eine schwache Feldlösung und eine starke. Die schwache Feldlösung zeichnet sich dadurch aus, dass die magnetische Energie kleiner ist als die kinetische Energie - hier kann man die Lorentzkraft als eine kleine, unbedeutende Störung des Systems ansehen (Zhang 2007). In einem starken Dynamo besitzt die Lorentzkraft einen viel bedeutenderen Einfluss und die magnetische Energie übersteigt im Allgemeinen die kinetische. Der Bereich, in dem eine schwache Feldlösung existiert, ist durch eine zweite Rayleigh-Zahl begrenzt, ab der nur noch die starke Feldlösung angenommen wird. Die Anwesenheit eines relativ starken, externen Feldes hat einen Einfluss auf die Bifurkation. Sarson et al. (1999) argumentieren (siehe Abbildung 5.7), dass das externe Feld prinzipiell die starke Feldlösung noch weiter verstärken und den Beginn dieses Lösungsastes hin zu kleineren Rayleigh-Zahlen verschieben kann. Dies ist dadurch zu verstehen, dass die Anwesenheit des externen Feldes die kritische magnetische Reynoldszahl für den Dynamo absenkt. Die eventuell auftretende schwache Feldlösung kann durch das externe Feld etwas verstärkt werden.

Für die Konvektion im Kern gibt es eine Reihe von wichtigen Kräftegleichgewichten, die hier kurz vorgestellt werden. In einem schnell rotierenden System (also kleine Ekman-Zahl) ohne Magnetfeld stellt sich das geostrophische Kräftegleichgewicht von Corioliskraft und den Kräften durch Druckgradienten ein. Ausgehend von der Kräftebilanz im stationären Zustand:

$$0 = -2\rho\Omega \times \underline{v} - \nabla p \quad (5.23)$$

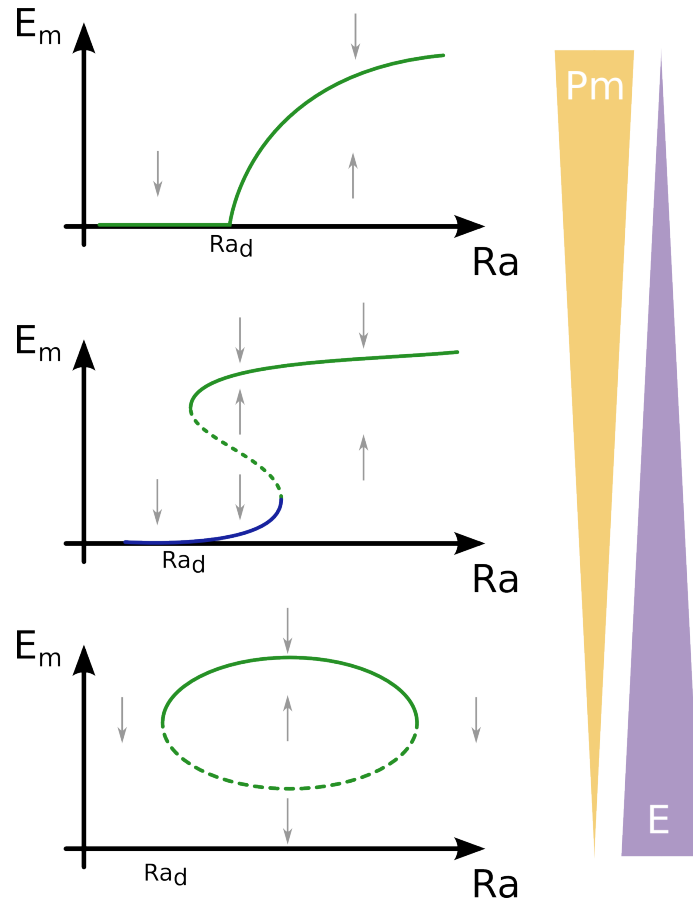


Abbildung 5.6: Typen der Dynamobifurkation. Gezeigt sind die magnetischen Energien in Abhängigkeit der Rayleighzahl für verschiedene Lösungsäste. Die verschiedenen Bifurkationen erhält man durch Variation der magnetischen Prandtl-Zahl P_m oder der Ekman-Zahl E wie rechts durch die Pfeile dargestellt. Die Entwicklung der Dynamosimulationen für nicht-stationäre Startlösungen ist durch die grauen Pfeile gezeigt. *Oben*: Superkritische Bifurkation. *Mitte*: Subkritische Bifurkation. In blau ist die schwache Feldlösung und in grün die starke Feldlösung dargestellt. Die gestrichelte Linie zeigt den instabilen Abschnitt an. *Unten*: Isola-Bifurkation. Abbildung nach Morin und Dormy (2009).

und durch Rotationsbildung ergibt sich in einem inkompressiblen Medium mit homogener Rotation entlang der Z -Achse

$$\begin{aligned}
 0 &= -2\rho \nabla \times (\Omega \underline{e}_z \times \underline{v}) \\
 &= -2\rho [\underline{\Omega}(\nabla \cdot \underline{v}) - (\underline{\Omega} \cdot \nabla)\underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla)\underline{\Omega} - \underline{v}(\nabla \cdot \underline{\Omega})] \\
 &= 2\rho \Omega \partial_z \underline{v}
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

das sog. Taylor-Proudman Theorem. Eine besondere Eigenschaft von geostrophischen Strömungen ist damit die verschwindende (bzw. minimale) Variation in der Richtung parallel zur Rotationsachse. Für eine schwach überkritische Konvektion bilden sich Taylor-Säulen mit konstanter Vortizität $\underline{w} = \nabla \times \underline{v}$ aus. Diese Säulen sind beispielhaft in Abbildung 5.8 gezeigt. Aus dem Taylor-Proudman Theorem folgt aber nicht, dass die Strömung in Z -Richtung Null sein, sondern nur, dass die Strömung nicht von Z abhängt. Zusätzlich

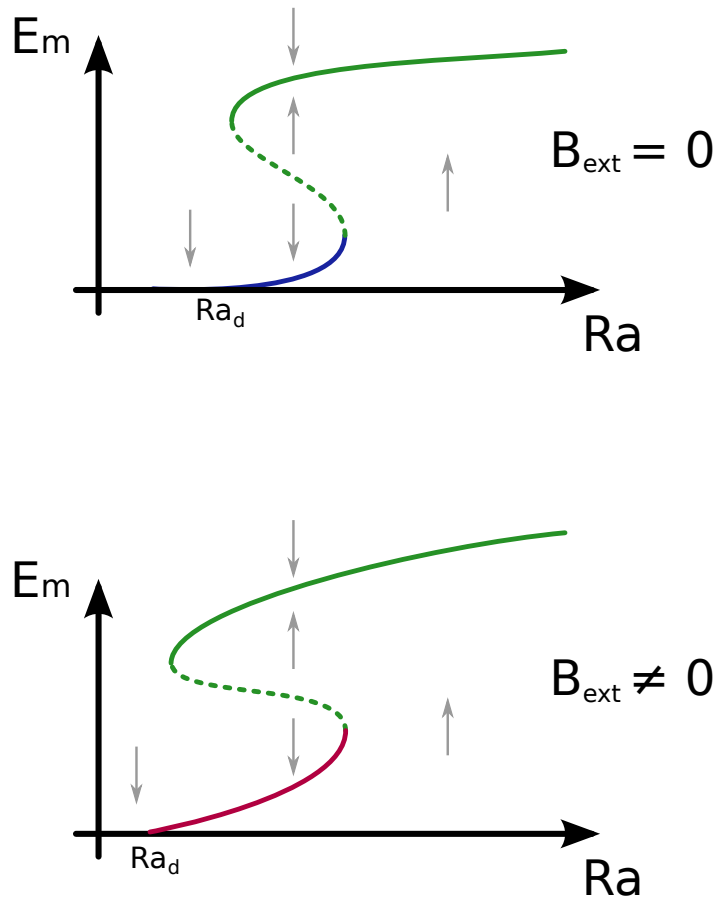


Abbildung 5.7: *Oben*: Bifurkationsdiagramm ohne externes Feld. *Unten*: Bifurkationsdiagramm mit externem Feld. Abbildung nach Sarson et al. (1999).

zur rotierenden Bewegung stellt sich auf Grund der Ekman-Grenzschicht ein axialer Fluss (parallel zur Z-Achse) zum Äquator (Zyklonen) oder zu den Polen (Anti-Zyklonen) hin ein.

Bildet man das Betragsverhältnis der Lorentzkraftdichte $f_L = 1/\mu_0(\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B}$ zur Corioliskraftdichte $f_C = 2\rho(\underline{v} \times \underline{\Omega})$ und schätzt die charakteristische Geschwindigkeit \underline{v} durch $v = D/\tau_D$ (mit der Diffusionszeit $\tau_D = D^2/\eta$) ab, so erhält man die Elsasser-Zahl

$$\Lambda = \frac{\left| \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B} \right|}{\left| 2\rho(\underline{v} \times \underline{\Omega}) \right|} \approx \frac{B^2}{2\mu_0\rho_m D^2 \frac{\eta}{D^2} \Omega} = \frac{B^2}{2\mu_0\eta\rho_m\Omega} \quad (5.25)$$

Diese Zahl wird im Allgemeinen als Indikator für das sog. magnetostrophische Gleichgewicht $\Lambda \approx 1$ angesehen (s. z.B. Christensen und Aubert 2006, für eine Diskussion). In diesem Regime ist die Lorentzkraft hinreichend stark, um die Konvektion maßgeblich zu beeinflussen. Damit kann das Magnetfeld die Beschränkung der Strömung durch das Taylor-Proudman Theorem (s.o.) aufheben und der Strömung mehr Freiheit geben. Die Lorentzkraft kann also die Strömung bzw. deren Variation für $\Lambda < 1$ verstärken. Bei einer stärkeren Strömung ist wiederum die magnetische Reynoldszahl größer (s. Kapitel 5.1) und der Dynamo arbeitet damit effektiver. Als Konsequenz kann dann das Magnetfeld noch stärker werden und eine Elsasser-Zahl > 1 erreichen. Allerdings hat ein zu starkes

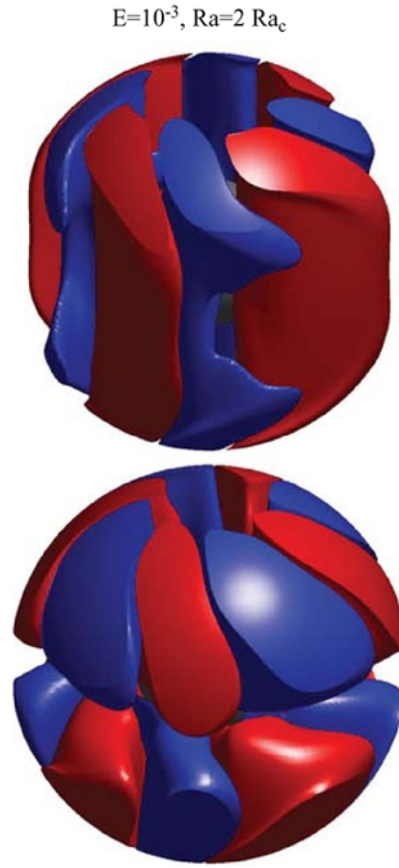


Abbildung 5.8: *Oben:* z -Vortizität-Isokonturen („Taylor-Säulen“) in einer hydrodynamischen Simulation. Blau bedeutet negative und rot positive Vortizität. *Unten:* Isokonturen der z -Komponente der Strömung zu der gleichen Simulation wie oben. Blau steht für einen negativen und rot für einen positiven Wert. Abbildung aus Wicht und Tilgner (2010).

Magnetfeld bei $\Lambda > 1$ eher eine dämpfende Wirkung auf die Konvektion. Daher bietet das magnetostrophische Gleichgewicht eine Möglichkeit, den Dynamoprozess zu stabilisieren und das ansonsten exponentielle Wachstum des Magnetfeldes zu stoppen (z.B. Christensen 2010). Schubert und Soderlund (2011) schätzen, dass das magnetostrophische Gleichgewicht zumindest bei der Erde, Jupiter und Saturn erreicht wird. Merkur, Ganymed und die beiden anderen Gasriesen Uranus und Neptun sind in dieser Abschätzung um Größenordnungen von diesem magnetostrophischen Gleichgewicht entfernt.

Ein anderes magnetohydrodynamisches Kräftegleichgewicht könnte für die Stabilisierung der oben genannten schwachen Feldlösung verantwortlich sein. Die Lorentzkraft kann nicht nur durch die Corioliskraft balanciert werden, sondern auch durch viskose Kräfte. In diesem Fall ist die sog. Hartmann-Zahl

$$Ha = \frac{BD}{\sqrt{2\mu_0\rho_m\eta\nu}} = \sqrt{\frac{\Lambda}{E}} \quad (5.26)$$

als Kräftebilanz der Lorentzkraft mit den viskosen Kräften von der Größenordnung 1.

5.6 Mean-Field Dynamotheorie

Ist man nur am großskaligen, mittleren Magnetfeld interessiert, kann man die komplexe Konvektionsstruktur im äußeren Kern vereinfacht in ihrer Auswirkung auf den Dynamo darstellen (z.B. Steenbeck et al. 1966, Cardin und Cugliandolo 2008). Trennt man die Strömung und das Magnetfeld in Mittelwert und Fluktuation:

$$\begin{aligned}\underline{B} &= \langle \underline{B} \rangle + \underline{B}' \\ \underline{v} &= \langle \underline{v} \rangle + \underline{v}'\end{aligned}\quad , \quad (5.27)$$

so ergibt sich für das gemittelte Magnetfeld die Induktionsgleichung

$$\partial_t \langle \underline{B} \rangle = \nabla \times \langle \underline{v} \times \underline{B} \rangle + \eta \Delta \langle \underline{B} \rangle \quad . \quad (5.28)$$

Der Feldgenerierungsterm vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned}\langle \underline{v} \times \underline{B} \rangle &= \langle (\langle \underline{v} \rangle + \underline{v}') \times (\langle \underline{B} \rangle + \underline{B}') \rangle \\ &= \langle \underline{v} \rangle \times \langle \underline{B} \rangle + \underbrace{\langle \underline{v}' \times \underline{B}' \rangle}_{=: \underline{\varepsilon}}\end{aligned}\quad . \quad (5.29)$$

Subtraktion der Induktionsgleichungen

$$\partial_t \underline{B}' = \partial_t \underline{B} - \partial_t \langle \underline{B} \rangle = \nabla \times (\langle \underline{v} \rangle \times \underline{B}') + \nabla \times (\underline{v}' \times \langle \underline{B} \rangle) + \nabla \times (\underline{v}' \times \underline{B}' - \langle \underline{v}' \times \underline{B}' \rangle) + \eta \Delta \underline{B}' \quad (5.30)$$

zeigt, dass der fluktuierende Anteil des Magnetfeldes \underline{B}' ein lineares Funktional des mittleren Magnetfeldes $\langle \underline{B} \rangle$ ist. Daher kann die mittlere elektromotorische Kraft der Fluktuationen $\underline{\varepsilon}$ linear in $\langle \underline{B} \rangle$ und seinen Ableitungen entwickelt werden. Daher der lineare Ansatz

$$\varepsilon_i = \alpha_{ij} \langle B_j \rangle + \beta_{ijk} \frac{\partial \langle B_j \rangle}{\partial x_k} \quad . \quad (5.31)$$

Unter der Annahme von homogener und isotroper Turbulenz erhält man

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij} \quad \beta_{ijk} = -\beta \epsilon_{ijk} \quad . \quad (5.32)$$

Dabei sind δ_{ij} und ϵ_{ijk} das Kronecker-Delta und das Levi-Civita-Symbol. Daraus folgt die Induktionsgleichung (5.28) für das mittlere Magnetfeld

$$\partial_t \langle \underline{B} \rangle = \nabla \times \langle \underline{v} \rangle \times \langle \underline{B} \rangle + \nabla \times \alpha \langle \underline{B} \rangle + \eta^* \Delta \langle \underline{B} \rangle \quad . \quad (5.33)$$

mit $\eta^* = \eta + \beta$ bei homogenen β . Mit der Mean-Field-Beschreibung, können auch Dynamos mit achsensymmetrischen Feldern modelliert werden, da die nicht-achsensymmetrischen Terme implizit enthalten sind. Sonst würde das Modell das Cowling-Theorem verletzen, nach dem kein Dynamo ein pures achsensymmetrisches Feld aufrechterhalten kann.

Der Wirkung des Terms $\nabla \times \alpha \langle \underline{B} \rangle$ ist in der Literatur als α -Effekt bekannt. Nicht alle Strömungen erzeugen einen α -Effekt. Besonders wichtig für Dynamowirkungen sind die α -Effekt generierenden, helikalen Strömungen. Die Strömungshelizität ist durch

$$\mathcal{H} = \underline{v} \cdot (\nabla \times \underline{v}) \quad (5.34)$$

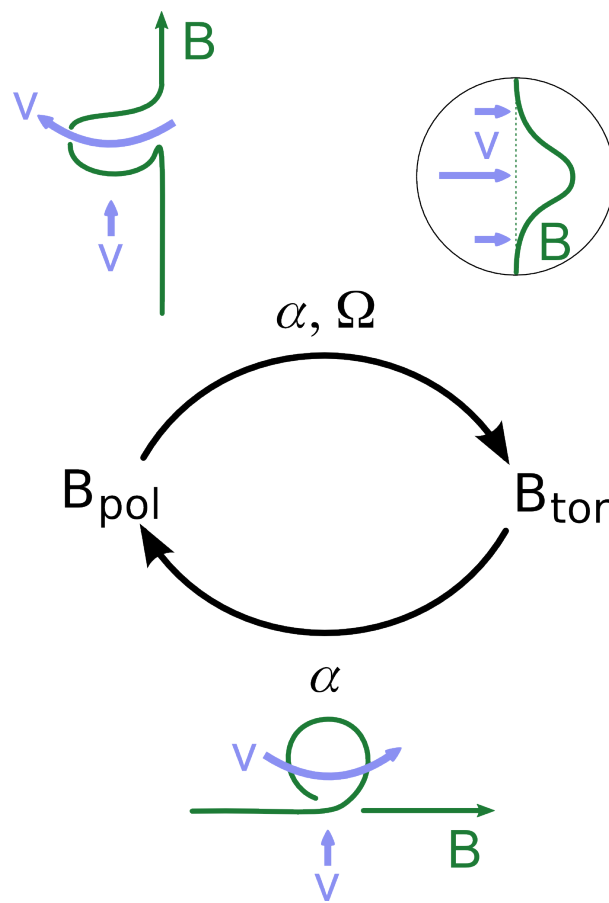


Abbildung 5.9: Schematische Darstellung des $\alpha\Omega$ -Zyklus. Das poloidale Magnetfeld B_{pol} wird durch entweder dem α -Effekt oder dem Ω -Effekt in ein toroidales Feld B_{tor} umgewandelt. Der Zyklus wird durch den α -Effekt vervollständigt, bei dem auch ein toroidales Magnetfeld aus einem poloidalem erzeugt werden kann. Der Ω -Effekt beruht auf einer differentiellen Rotation während der α -Effekt z.B. auf einer helikalen Strömung basiert. Beispielhafte Situationen, bei denen diese aufgezählten Effekte auftreten können, sind außerdem jeweils gezeigt. Dabei ist das Magnetfeld B grün und die Strömung v in blau dargestellt.

definiert. Die Taylor-Säulen, die in Kapitel 5.5 vorgestellt wurden, tragen eine solche helikale Strömung. Sie besitzen eine z -Vortizität und zusätzlich eine entweder polwärts oder äquatorwärts gerichtete Strömung. Mittels dieses α -Effekts kann eine toroidale Magnetfeldkomponente in eine poloidale umgewandelt werden, oder umgekehrt. Differentielle Rotation stellt einen weiteren Effekt dar, um ein poloidales Magnetfeld in ein toroidales umzuwandeln. Differentielle Rotation tritt z.B. bei zwei ineinander gesetzten, festen Kugelschalen auf, die unterschiedlich schnell rotieren. Eine andere differentielle Rotation ist bei der Sonne zu finden, wo die Rotationsgeschwindigkeit entlang eines Meridians variiert. Der Induktionseffekt durch differentielle Rotation ist als Ω -Effekt bekannt. Zur Anschaulichkeit sind die kinematischen Effekte auf das Magnetfeld in Abbildung 5.9 schematisch dargestellt. Um einen Dynamoprozess aufrechtzuerhalten, muss es stets einen α -Effekt geben, der das toroidale Feld zu einem poloidalen transformiert. Die Um-

wandlung von einem poloidalen zu einem toroidalen Magnetfeld kann sowohl (einzeln oder zugleich) über einen α als auch über einen Ω -Effekt geschehen.

5.7 Dynamo-Skalierungsgesetze

Im Laufe der Zeit können sich wesentliche planetare Parameter ändern, wie die Rotationsgeschwindigkeit oder die Heftigkeit der Konvektion im Kern. Daher hat man versucht, die sich daraus ergebende Änderung des planetaren Magnetfeldes in Skalierungsgesetzen zu erfassen. Ziel der Skalierungsgesetze ist es, für eine Breite von planetaren Parametern die zu erwartende Magnetfeldstärke abzuschätzen (siehe Christensen (2010) für eine Übersicht).

Zur Abschätzung der Magnetfeldstärke eines Planeten gibt es verschiedene Ansätze. Eine mögliche Annahme ist, dass sich der Kern im magnetostrophischen Gleichgewicht befindet. In diesem Fall gilt

$$\Lambda_{\text{vol}} = \frac{|1/\mu_0(\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B}|}{|2\rho_m(\underline{v} \times \underline{\Omega})|} \approx \frac{B^2}{2\mu_0\rho_m\eta\Omega} = 1 \quad , \quad (5.35)$$

wobei als charakteristische Zeitskala die magnetische Diffusionszeit (5.12) angenommen wurde. Für die Erde, Jupiter und Saturn schätzen Schubert und Soderlund (2011) die Elsasser-Zahl auf 0,1, 1 und 0,01 ab. Mit den für Merkur typischen Werten in Tabelle 7.3 ergibt sich $B = 1,85 \cdot 10^5 \text{ nT}$. Nimmt man weiterhin nach Wicht et al. (2007) an, dass

- von diesem Gesamtfeld 1/3 poloidal ist
- vom poloidalen Feld $1/\sqrt{2}$ dipolar ist
- die Dynamowirkung des Magnetfeld um eine Größenordnung gegenüber der Kern-Mantel-Grenze verstärkt

und extrapoliert das so ermittelte Dipolfeld von der Kern-Mantel-Grenze zur Oberfläche, so erhält man ein Dipolfeld der Stärke $B_{\text{dip}} = 2511 \text{ nT}$. Verglichen mit dem tatsächlich gemessenen Wert von 190 nT (Anderson et al. 2012) ist dies um einen Faktor 13 zu groß. Von der Vielzahl der unternommenen numerischen Simulationen ist allgemein bekannt, dass sich die Elsasser-Zahl nicht immer auf 1 einstellt, sondern sich im Bereich 0,1 – 100 bewegt (z.B. Christensen et al. 2007). Nimmt man das gemessene Dipolfeld und kehrt die obige Rechnung um, so ergibt sich eine Elsasser-Zahl von $2,87 \cdot 10^{-5}$. Dies kann man so deuten, dass Merkurs Kern nicht im magnetostrophischen Gleichgewicht ist oder dass die Elsasser-Zahl kein gutes Maß für die Magnetostrophie ist (Christensen und Aubert 2006). Der abgeschätzte Wert für die Elsasser-Zahl sollte auch mit Vorsicht betrachtet werden, da er auf den Annahmen über die Aufteilung von toroidalen und poloidalen Magnetfeld und der Anteil des Dipolfeldes am Gesamtmagnetfeld beruht. Diese Annahmen basieren auf Erfahrungswerten aus Simulationen und müssen natürlich nicht zwingend und exakt für den Merkurkern passen.

Eine weitere Art, die magnetische Dipolstärke zu skalieren wird von Olson und Christensen (2006) vorgestellt. Dabei wird aus einer Vielzahl von Simulationen mit einem konstanten Temperaturkontrast zwischen innerem Kern und Kern-Mantel-Grenze bei einer

Tabelle 5.1: Physikalische Größen für das Skalierungsgesetz nach Olson und Christensen (2006). Werte aus Wicht et al. (2007) und Buske (2006). g_o ist für die angegebene Kernmassendichte, einer Mantelmassendichte von $\rho_m = 2835 \text{ kg/m}^3$ und einem Kernradius von 2030 km berechnet. Der Wert für das Aspektverhältnis ist eine ad-hoc Annahme, da es bisher nicht durch Messungen eingegrenzt werden konnte.

Physikalische Größe	Wert
thermischer Ausdehnungskoeffizient	$\alpha = 3 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$
Gravitationsbeschleunigung	$g_o = 3,7 \text{ m/s}^2$
spezifische Kernwärmekapazität	$C_p = 750 \text{ J/kg K}$
Aspektverhältnis	$\chi = 0,5$
Wärmeflussdichte	$Q = 4 \text{ mW/m}^2$
Massendichte	$\rho_m = 8300 \text{ kg/m}^3$

rein thermischen Konvektion ein Zusammenhang

$$\text{Lo}_{\text{dip}} = \gamma \text{Ra}_Q^{1/3} \quad (5.36)$$

gefunden. Dabei stehen Lo und Ra_Q für die dipolare Lorentz-Zahl

$$\text{Lo}_{\text{dip}} = \frac{B_{\text{dip}}}{\sqrt{\rho_m \mu_0} \Omega d} \quad (5.37)$$

und für die Auftriebsfluss-basierte Rayleigh-Zahl

$$\text{Ra}_Q = \frac{\alpha g_o Q}{\chi d^2 \Omega^3 \rho_m C_p} \quad (5.38)$$

wobei α , g_o , Q und C_p für den thermischen Ausdehnungskoeffizienten, die Gravitationsbeschleunigung an der Kern-Mantel-Grenze, die konvektive Wärmeflussdichte und die spezifische Wärmekapazität (bei konstantem Druck) stehen. Interessanterweise hängt das planetare Dipolmoment in dieser Skalierung nicht explizit von der planetaren Rotationsrate ab, wie man durch Kombination der letzten drei Gleichungen erkennen kann. Nimmt man die Werte an, die in Tabelle 5.1 zusammengefasst sind, so erhält man $\text{Ra}_Q = 7,26 \cdot 10^{-8}$.

Der Faktor γ ist ein Anpassungsparameter an die Dynamosimulationsergebnisse. Für dipolare Dynamos ist $0,1 \leq \gamma \leq 0,2$ während für multipolare Dynamos $10^{-3} \leq \gamma \leq 10^{-2}$ anzunehmen ist (Olson und Christensen 2006). Der Wert für die multipolaren Dynamos ist dabei in Olson und Christensen (2006) relativ schlecht durch Simulation abgedeckt und damit recht unbestimmt. Für $\gamma = 0,1$ ist $\text{Lo}_{\text{dip}} = 4,17 \cdot 10^{-4}$ und $B_{\text{dip},-1} = 5,36 \cdot 10^4 \text{ nT}$ und für $\gamma = 10^{-3}$ ist $\text{Lo}_{\text{dip}} = 4,17 \cdot 10^{-6}$ und $B_{\text{dip},-3} = 536 \text{ nT}$. Diese Werte gelten für die Dynamoregion und müssen noch zumindest mit dem Extrapolationsfaktor $(R_{\text{cmb}}/R_M)^3 = (2030/2440)^3 = 0,6$ abgeschwächt werden, um den Oberflächenwert zu erhalten. Im letzteren Fall ergibt sich ein Wert von 322 nT. Dieser Wert ist zwar in der gleichen Größenordnung wie der tatsächlich nachgewiesene Wert, aber es gibt bei der Anwendung dieser Skalierung mehrere Probleme. Der angenommene Wärmefluss ist rund

ein Drittel zu niedrig, um thermische Konvektion zu betreiben und damit die Voraussetzung für einen Dynamoprozess zu schaffen. Der Wert für γ ist ein extremer Wert und passt eigentlich nur zu wirklich multipolaren Dynamos mit dominierenden höheren Multipolen. Die Messdaten der MESSENGER-Sonde (Anderson et al. 2012) deuten auf einen starken Quadrupol hin, aber der Dipol dominiert trotzdem das Spektrum.

Um der Frage nachzugehen, welcher Wert für γ anzusetzen ist, kann man die zu erwartende lokale Rossby-Zahl Ro_l (z.B. Olson und Christensen 2006) für Merkur abschätzen. Die lokale Rossby-Zahl ist ein Maß für das Produkt der charakteristischen Geschwindigkeit u mit der charakteristischen Längenskala l_u der Strömung:

$$Ro_l = \frac{l_u}{\pi} Ro = \frac{l_u}{\pi} \frac{u}{\Omega d} \quad . \quad (5.39)$$

Wie Christensen (2010) zeigen, hängt die Dipolarität eines Dynamos von dieser lokalen Rossby-Zahl ab. Grob gesagt sind dipoldominierte Dynamos im Bereich $Ro_l < 0,12$ und multipolare im Bereich $Ro_l > 0,12$ zu finden. Interessant ist hier auch der Einfluss der planetaren Rotationsrate. Für einen langsam rotierenden Planeten (wie z.B. Merkur) ist Ro_l groß und es sollte ein multipolarer Dynamo erwartet werden. Olson und Christensen (2006) präsentieren für Ro_l ein Skalierungsgesetz

$$Ro_l = 0,58 Ra_Q^{1/2} E^{-1/3} Pr^{1/5} Pm^{-1/5} \quad . \quad (5.40)$$

Für thermische Kernkonvektion ist $Pr = 0,1$ während für chemische Kernkonvektion $Pr = 100$ anzusetzen ist (Wicht et al. 2007). Nimmt man die Werte für die Prandtl-Zahl als Grenzwerte, ergibt sich für $E = 10^{-12}$ und $Pm = 10^{-6}$ eine lokale Rossby-Zahl im Bereich von $17 < Ro_l < 62$. In diesen Bereich fallen keine Simulationen von Olson und Christensen (2006) und eine Abschätzung von γ erscheint damit unbrauchbar. Olson und Christensen (2006) geben mit leicht anderen Werten für die Kontrollparameter für Merkur eine lokale Rossby-Zahl von $Ro_l = 8$ an. Die hohen Werte für die lokale Rossby-Zahl lässt vermuten, dass beim Merkurdynamo die höheren magnetischen Multipole stark ausgeprägt sein müssen. Es stellt sich hier die Frage wie dominant der Dipol bei Merkur wirklich ist. Die Dipolarität sei hier über die Mauersberger-Koeffizienten (s. Gleichung (2.13)) an der Kern-Mantel-Grenze

$$\mathcal{D} = \frac{W_1}{\sum_l W_l} \quad (5.41)$$

definiert. Mit den von Anderson et al. (2012) angegebenen Gauss-Koeffizienten ergeben sich die Mauersberger-Koeffizienten an der Kern-Mantel-Grenze ($r = 2030$ km) $W_1 = 2,18 \cdot 10^5 \text{ nT}^2$, $W_2 = 7,15 \cdot 10^4 \text{ nT}^2$, $W_3 = 1,22 \cdot 10^4 \text{ nT}^2$ und $W_4 = 1,48 \cdot 10^3 \text{ nT}^2$. Daraus ergibt sich eine Dipolarität von $\mathcal{D} = 0,72$. Hierbei sei gesagt, dass diese Dipolarität nur an der Kern-Mantel-Grenze gilt. Wie die einzelnen Moden innerhalb des flüssigen Kerns verändert werden und wie dies die Dipolarität verändert, ist ohne weiteres nicht vorherzusagen. Außerdem ist es nicht möglich, Informationen über die toroidale Feldverteilung zu erlangen. Eine Dipolarität von 0,72 würde bedeuten, dass die lokale Rossby-Zahl etwas kleiner als der kritische Wert von 0,12 ist (Christensen 2010, Abbildung 4). Damit würden die oben gezeigten theoretischen Abschätzungen der lokalen Rossby-Zahl nach den Skalierungsgesetzen um mindestens eine Größenordnung abweichen.

Eine andere interessante Größe ist die magnetische Reynoldszahl des Merkurkerns. Basierend auf der Darstellung von Christensen und Aubert (2006) wie die magnetische Reynolds-Zahl und die Elsasser-Zahl durch den Auftriebsfluss (und damit die für die Konvektion zur Verfügung stehende Energie) bestimmt wird, entwickeln Wicht et al. (2007) eine Formulierung für den Merkur. Sie nehmen an, dass nicht der gesamte Kern an der thermischen Konvektion teilnimmt, sondern der obere Teil thermisch stabil ist. Zusätzlich zur thermischen Konvektion kann auch chemische Konvektion im Kern durch das Ausfrieren eines inneren Kerns betrieben werden. Dadurch kann der Massenfluss beim Merkur wesentlich höher sein als es der thermische Fluss an der Kern-Mantel-Grenze ahnen lässt. Während Christensen und Aubert (2006) bei einem abgeschätzten Kernmagnetfeld von ca. 5 mT für den Merkur eine unterkritische magnetische Reynoldszahl von 4 voraussagen, lässt sich nach Wicht et al. (2007) der Zusammenhang

$$R_m = 0,83 \frac{P_m}{E} \left(\frac{\Lambda}{F P_m E^{-1}} \right)^{0,68} \quad (5.42)$$

mit F als Funktion des inneren Kernradius, des äußeren Kernradius und des Begrenzungsradius der thermisch stabilen Zone herstellen. Dieser Zusammenhang ist überraschend, da in den Simulationen von Christensen und Aubert (2006) dieses Exponentialgesetz nicht so eindeutig ist. Für die Werte $E = 10^{-12}$, $P_m = 10^{-6}$, $\chi = 0,5$, $\Lambda = 1$ und der Annahme, dass nur 40% des Kerns konvektieren (Wicht et al. 2007) ergibt sich eine magnetische Reynoldszahl von 59. Wenn die kritische magnetische Reynoldszahl gerade 40 (Olson und Christensen 2006) bzw. 50 (Wicht et al. 2007) ist, wäre der Merkurdynamo nur schwach überkritisch. In diesem Modell kann eine Abschwächung des Dipolfeldes durch

1. das geometrische Abklingen zur Kern-Mantel-Grenze,
2. den Skin-Effekt (wenn das Dipolfeld oszilliert) und/oder
3. den magnetosphärischen Feedback-Effekt

erfolgen. Christensen und Wicht (2008) passen für ihre Simulationen mit nur teilweise konvektierendem Kern ein Gesetz für die magnetische Reynoldszahl an und erhalten unter der Annahme, dass nur 40% des Kerns konvektieren, einen Bereich für die magnetische Reynoldszahl von 400–800. Dies entspricht einem stark angeregten Dynamo (8–16-fach überkritisch).

6 Vereinfachende Modelle zum Feedbackdynamo

6.1 Dynamos im externen Feld

Klassischer Weise gilt es in der Dynamotheorie zu zeigen, dass planetare Dynamos ohne ein signifikantes externes Feld existieren können (abgesehen von einem Saatfeld). Manche Himmelskörper wie die Jupitermonde sind in ein externes Feld eingebettet. Der Merkur ist einem relativ starken externen Feld seiner Magnetosphäre ausgesetzt. Der Unterschied zu den Jupitermonden ist jedoch, dass das externe Feld beim Merkur auf das interne reagiert, da sich bei einem ändernden internen Feld auch die Wechselwirkung mit dem Sonnenwind verändert. Es existieren bereits einige Arbeiten, die einen Dynamo in einem bedeutsamen externen Feld betrachten. Diese Arbeiten bilden die Grundlage für den hier vorgestellten magnetosphärischen Feedbackdynamo und sollen daher hier kurz vorgestellt werden, um einen Vergleich zu dieser Arbeit zu erlauben.

Levy (1979) betrachtet einen kinematischen $\alpha\Omega$ -Dynamo unter Einfluss eines statischen, externen Feldes B_{ext} . Der wesentliche Kontrollparameter in seinem Modell ist die Dynamozahl N . In einer Dimensionsanalyse zeigt Levy (1979), dass die Dynamozahl im stationären Fall

$$N = \frac{B_p}{B_p + B_{\text{ext}}} \quad (6.1)$$

ist. Hier steht B_p für die Stärke des poloidalen Feldes. Wenn das externe Feld verschwindet, ist die Dynamozahl für eine stationäre Lösung $N = 1$. Jedoch mit externem Feld kann die Dynamozahl prinzipiell alle Werte annehmen und die Schwelle für den stationären Dynamo ist damit also verändert. Der Ω -Prozess wird bei Levy (1979) auf die differentielle Rotation einer starren Kugelschale reduziert während der α -Effekt sich auf zwei Ringe auf dieser Schale konzentriert. Dieser Dynamo (ohne externes Feld) dient als Referenz und der Induktionseffekt reduziert sich auf eine konstante Funktion Γ :

$$\frac{B_p}{B_{\text{ext}}} = \Gamma \frac{NN_c}{N_c - N} \quad , \quad (6.2)$$

wobei B_p die Stärke des Dipolfeldes an der Planetenoberfläche darstellt. Die Dynamozahl N_c ist die Dynamozahl des stationären Referenzdynamos. Die Wahl der Dynamozahl N resultiert dann in einem bestimmten Verhältnis vom internen zum externen Feld. Die Lösungszweige dieses Dynamomodells sind in Abbildung 6.1 gezeigt. Dynamos mit starkem internen Feld resultieren entweder bei paralleler Ausrichtung von internem zu externem Feld oder wenn das externe Feld sehr schwach ist. Bei negativen Dynamozahlen und einem relativ schwachen externen Feld (gegenüber dem internen) existiert ein Bereich mit

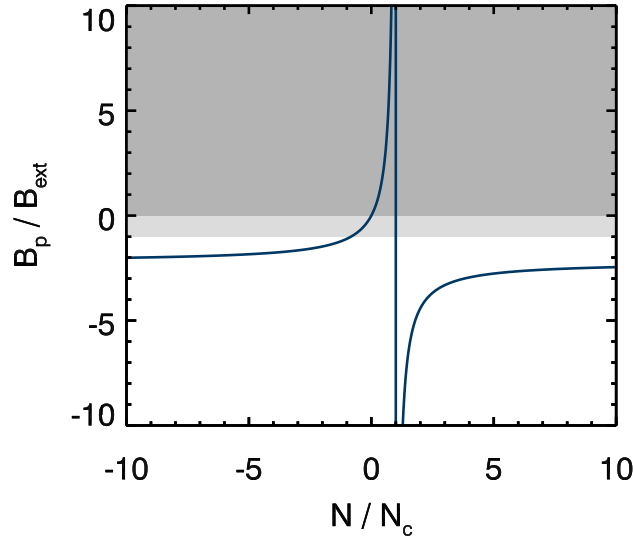


Abbildung 6.1: Verhältnis zwischen internem Dipolfeld und externem Feld in Abhängigkeit der Dynamozahl normiert auf die kritische Dynamozahl. Der dunkelgraue Bereich markiert den Bereich mit parallel ausgerichteten Feldern und der weiße Bereich mit anti-parallelen Feldern. Die hellgraue Zone ist der Bereich, in dem das externe Feld stärker als das interne ist. Abbildung nach Levy (1979) mit einem Wert für Γ von 0,022.

potenziell schwachen internen Feldern in etwa in der Größenordnung des externen Feldes. Dieser Bereich kann für den Merkur in Frage kommen.

Sarson et al. (1997) betrachten ein dynamisches Modell, in dem Jupiters Magnetfeld die Magnetfelderzeugungsmechanismen in den Monden Io und Ganymed beeinflussen. Dabei wird die externe Felddausrichtung durch den Jupiter fest vorgegeben. Für Io erwarten Sarson et al. (1997), dass die Konvektion im Kern zu schwach ist, um einen eigenständigen Dynamoeffekt zu erzeugen. Das Iomagnetfeld speist sich demnach in einem magnetokonvektiven Prozess komplett aus dem externen Jupiterfeld. Für Ganymed wird ein eigenständiger Dynamoprozess im Kern erwartet. Hierbei ist allerdings zu beachten, dass der Ganymedkern sehr klein ist und damit das Verhältnis von externem zu internem Feld sehr gering ausfällt. Das externe Jupiterfeld beträgt bei Ganymed etwa 100 nT. Das interne Oberflächenfeld bei Ganymed ist etwa 750 nT. Setzt man das interne Feld mit einem Dipol-Gesetz bis zur Kern-Mantel-Grenze (planetarer Radius: $R_G = 2634$ km, Kernradius: $R_c = 660$ km) fort, so erhält man ein Verhältnis von

$$\frac{B_{\text{ext}}}{B_{\text{int,c}}} = \frac{100}{750 \left(\frac{R_G}{R_c} \right)^3} = 3,1 \cdot 10^{-3} \quad (6.3)$$

Damit erscheint es als unwahrscheinlich, dass hier ein Feedbackdynamo das heutige Magnetfeld beeinflusst. Es kann aber sein, dass in der Frühzeit des Mondes, wenn das interne Magnetfeld noch schwach ist, das externe Magnetfeld doch einen bedeutenderen Einfluss hatte. Sarson et al. (1997) vermuten, dass das externe Feld in dieser Frühzeit die heutige Polarität des Ganymedfeldes vorgab. Dies ist natürlich nur möglich, wenn sich der Ganymeddynamo in einem Regime ohne Feldumkehrungen befindet. Betrachtet man die

Situation bei Ganymed und Io differenzierter, so ist das externe Feld von Jupiter an den Kern-Mantelgrenzen parallel zu den internen Dipolen - also nicht anti-parallel wie beim in dieser Arbeit studiertem Feedbackdynamo für den Merkur.

Sarson et al. (1999) erweitern die Arbeit von Sarson et al. (1997) und betrachten in allgemeiner Weise den Dynamoprozess unter dem Einfluss eines externen Feldes, ohne direkte Anwendung auf einen physikalischen Körper. Das externe Feld ist hier konstant in Amplitude und Ausrichtung. Die Induktionsgleichung ist normalerweise invariant bezüglich des Vorzeichens des Magnetfeldvektors. Dies bedeutet, dass mit gleichem Strömungsfeld Magnetfelder in einer Ausrichtung aber auch mit entgegengesetzter Ausrichtung erzeugt werden können. Für eine magnetische Feldumkehr ist damit nicht zwingend eine Änderung des Strömungsfeldes vonnöten. Mit externem Feld in konstanter Ausrichtung wird die Invarianz in der Induktionsgleichung bezüglich des Vorzeichens des Magnetfeldes zerstört. Im Gegensatz dazu bleibt die Invarianz erhalten, wenn eine magnetosphärische Antwortfunktion betrachtet wird, die punktsymmetrisch zum Ursprung ist. In diesem Fall wechselt das externe Feld zusammen mit dem internen das Vorzeichen.

Der Ansatz für das externe Feld von Sarson et al. (1999) ist noch in einem weiteren Aspekt unterschiedlich zu dieser Arbeit. Sarson et al. (1999) setzen eine um das externe Feld $\underline{B}_{\text{ext}}$ modifizierte Induktionsgleichung (vgl. Gleichung (5.3)) an:

$$\partial_t \underline{B} = \underline{\nabla} \times (\underline{v} \times \underline{B}) + \underline{\nabla} \times (\underline{v} \times \underline{B}_{\text{ext}}) + \eta \Delta \underline{B} \quad . \quad (6.4)$$

Damit ist das externe Feld überall im Kern vorgegeben. Dieser Ansatz ist prinzipiell ähnlich wie bei Levy (1979), wird auch in den in Kapitel 6.2 und 6.3 vorgestellten Modellierungen von Glassmeier et al. (2007) verwendet.

Dagegen wird bei der Simulation des vollständigen, dreidimensionalen Feedbackmodells (s. Kapitel 7) das Feld nur an der Kern-Mantel-Grenze vorgegeben und das externe Feld wird zunächst durch Diffusion in den Kern hineingetragen. Tiefer im Kern kann das externe Feld zudem auch noch durch die Konvektion transportiert und kann rein hypothetisch auch vorverstärkt werden, bevor es mit dem Dynamo wechselwirkt. Dieser Ansatz erscheint realistischer als das externe Feld direkt überall im Kern vorzugeben. In der verwendeten Navier-Stokes-Gleichung von Sarson et al. (1999) wird auch ein gemischter Lorentzkraftterm

$$(\underline{\nabla} \times \underline{B}) \times \underline{B}_{\text{ext}} \quad (6.5)$$

eingeführt. Im simulierten 3D-Modell des Feedbackdynamos in Kapitel 7 ist dieser gemischte Term nicht implementiert, da man eigentlich in einem von elektrischen Strömen durchsetzten Gebiet nicht mehr einfach zwischen internem und externen Feld unterscheiden kann. Um die für die Simulationen benötigten numerischen Ressourcen beschränkt zu halten, verwenden Sarson et al. (1999) ein Modell, bei dem nur magnetische Moden mit dipolarer Symmetrie und erlauben nur eine nicht-achsensymmetrische Strömungsmoden. Dies schränkt natürlich die allgemeine Anwendbarkeit der Ergebnisse ein.

In den Simulationen von Sarson et al. (1999) werden Fälle betrachtet, bei denen es sich sowohl um magnetokonvektive Systeme als auch um Dynamos handelt. Ein wichtiges Ergebnis ist, dass sich der interne Dipol immer parallel zu dem von außen vorgegebenen Feld ausrichtet. Kehrt sich das externe Feld um, so folgt das interne nach einer gewissen Verzögerung. Beim magnetokonvektiven System ist das Gesamtmagnetfeld so schwach, dass keine wesentliche Beeinflussung des Strömungsfeldes feststellbar ist. Damit verbleibt das System im geostrophischen Gleichgewicht und das Magnetfeld wird

entlang der Taylor-Säulen an die Oberfläche transportiert. Damit konzentriert sich der magnetische Fluss an den Polen.

Bei den simulierten Dynamos mit geringerer magnetischer Diffusion und mit voll entwickeltem magnetischen Anfangsfeld, zeigt sich, dass das externe Feld erst bei einer Stärke 10 – 30% einen signifikanten Einfluss auf den Dynamo hat und eine Feldumkehr einleitet (auf die genaue Grenzfeldstärke gehen Sarson et al. (1999) nicht ein).

Darah und Sarson (2007) greifen die Ergebnisse von Sarson et al. (1999) auf und untersuchen mit einem kinematischen $\alpha^2\Omega$ -Modell den Effekt eines externen Feldes auf den Dynamo. In diesem Modell wird auch wie bei Sarson et al. (1999) das externe Feld direkt überall in der Dynamozone vorgeben und muss nicht erst in den Kern diffundieren. Dabei untersuchen sie die Bifurkation des Systems bei immer stärker angeregten Dynamos bei einem statischen externen Feld. Je nach Anregung wechselt der Charakter der Lösung ohne ein externes Feld von einem stationärem Dipol zu einem oszillierenden Dipol oder einem Quadrupol. Mit einem statischen, homogenen externen Feld wird die Quadrupol-Lösung unterdrückt. Je stärker das externe Feld ist, desto mehr wird auch ein oszillierender Dipol gedämpft - die Anregung eines oszillierenden Dipols geschieht mit steigendem externen Feld erst bei immer größeren magnetischen Reynoldszahlen.

Darah und Sarson (2007) untersuchen auch das Verhalten des Dynamos bei einem schwingenden externen Feld. Dabei ist es wichtig, die externe Frequenz mit der natürlichen Schwingungsfrequenz des Dynamos (bei einer bestimmten magnetischen Reynoldszahl) zu vergleichen. Wenn sich das externe Feld nur relativ langsam ändert, fluktuiert die magnetische Gesamtenergie kurz nach einem Nulldurchgang des externen Feldes. Dies ist vermutlich auf eine von außen induzierte Polumkehr zurückzuführen, Darah und Sarson (2007) gehen aber darauf nicht ein. Wenn die externe Frequenz nur etwas größer ist als die natürliche Frequenz, fängt die magnetische Energie mit der doppelten Anregungsfrequenz an zu schwingen. Eine physikalische Erklärung geben Darah und Sarson (2007) nicht an. Wenn die externe Frequenz viel größer ist als die natürliche, kann der Dynamo der externen Variation nicht folgen und entkoppelt sich vom externen Feld.

Sakuraba und Kono (2000) prägen einem dreidimensionalen konvektiven numerischen Modell einer leitfähigen Kugelschale ein externes homogenes Feld auf und variieren dessen Stärke von schwach ($\Lambda_{\text{ext}} = 0,1$) bis stark ($\Lambda_{\text{ext}} = 10$) unabhängig vom intern generierten Feld. Das externe Feld wird auch hier überall im Kern gleichzeitig vorgegeben und muss nicht von der Kern-Mantel-Grenze in den Kern diffundieren. Wie bei Sarson et al. (1999) wird auch hier ein gemischter Lorentzkraftterm zur Navier-Stokes-Gleichung hinzugefügt (s.o.). Beim Hochfahren des externen Feldes vollzieht sich ein Übergang von einer geostrophischen Strömung mit einem schwachen Dynamoeffekt hin zu einer magnetostrophischen Strömung mit starkem Feld. Dieser Übergang ist relativ scharf um $\Lambda_{\text{ext}} \approx 1$ angesiedelt und zeichnet sich besonders in einer Dominanz der magnetischen Gesamtenergie gegenüber der kinetischen Energie und in einem Anwachsen der Rotationsrate des inneren Kerns aus. Die Rotationsrate des inneren Kerns wird im magnetostrophischen Gleichgewicht modifiziert, da sich die Anti-zyklonen gegenüber den Zyklonen in der Äquatorebene stark vergrößern und dabei das Magnetfeld in sich konzentrieren. Das hat zur Folge, dass die Rotation des inneren Kerns durch ein Lorentz-Drehmoment (zusätzlich zum Drehmoment durch viskose Kräfte) beschleunigt wird.

6.2 Bisheriges Modell des negativ rückgekoppelten Dynamos für Merkur: stationäre Lösungen

Die Arbeit Glassmeier et al. (2007) zeigte zum ersten Mal, dass die Magnetosphäre für den ungewöhnlich schwachen Merkurdynamo verantwortlich sein kann. Dazu wurde in Glassmeier et al. (2007) eine vereinfachte magnetosphärische Antwortfunktion benutzt, die in Kapitel 3.3 vorgestellt wurde, verknüpft mit dem vereinfachten kinematischen Dynamomodelle nach Levy (1979) (siehe Kapitel 6.1).

Die Stärke des Dipols an der Kern-Mantel-Grenze ist durch

$$\frac{B_{\text{ext}}}{B_{\text{cmb}}} = \frac{1}{\Gamma} \frac{N_c - N}{NN_c} \quad (6.6)$$

gegeben (vgl. Gleichung 6.2). Die Antwortfunktion ist

$$B_{\text{ext}} = \frac{B_{\text{cmb}} R_{\text{cmb}} C(R_{\text{cmb}}, R_{\text{mp}})}{2 \sqrt[3]{\frac{B_{\text{cmb}}^2}{\mu_0 p_{\text{sw}}}}} \quad (6.7)$$

(vgl. Gleichung 3.15) und der Magnetopausenabstand ist

$$R_{\text{mp}} = R_{\text{cmb}} \sqrt[6]{\frac{B_{\text{cmb}}^2}{\mu_0 p_{\text{sw}}}} \quad (6.8)$$

(vgl. Gleichung 3.14). Aus diesen drei Gleichungen kann numerisch (iterativ) der Zusammenhang $B_p(N)$ bestimmt werden, der in Abbildung 6.2 gezeigt ist. Für diesen konkreten Fall wurde $\Gamma = 0,022$, $N_c = 100$, $p_{\text{sw}} = 13,4$ nPa, $R_{\text{cmb}} = 2000$ km und $R_M = 2440$ km angesetzt (Glassmeier et al. 2007, Smith et al. 2012). Zur Erinnerung sei hier gesagt, dass ohne externes Feld nur eine stabile Lösung mit der Dynamozahl N_c existiert. Mit externem Feld gibt es zwei Lösungsäste. Eine Lösung mit einem starken Feld bei positiven Dynamozahlen und eine mit einem schwachen Feld für negative Dynamozahlen. Für den schwachen Lösungsast ist das Oberflächenfeld kleiner als in etwa 1000 nT für alle Dynamozahlen und stellt damit eine Möglichkeit zur Erklärung des Merkurfeldes dar. Die Singularität bei $N = N_c$ hat ihren Ursprung in Gleichung (6.6). Um die linke Seite der Gleichung Null zu bekommen, muss das externe Feld verschwinden oder das interne Feld unendlich groß werden, was effektiv dasselbe ist, wenn man eine Antwortfunktion wie in Gleichung (6.7) ansetzt. Bei $N = N_c$ erhält man allerdings eine stationäre Lösung ohne externes Feld. Die Feldstärke ist dann beliebig und richtet sich nach der Saalfeldstärke. Alleine das Hinzufügen des externen Feldes mittels der Antwortfunktion entscheidet zusammen mit der Dynamozahl also über die letztendliche Dynamofeldstärke im gekoppelten System.

Bei den Lösungsästen handelt es sich um stationäre Lösungen des kinematischen Dynamoproblems. Ob diese Äste stabil sind, wie diese Lösungen eventuell erreicht werden können, und ob sich die Magnetfeldstruktur mit der Dynamozahl verändert, wird in Glassmeier et al. (2007) zur weiteren Untersuchung angeregt. An diesem Punkt setzt diese Arbeit an.

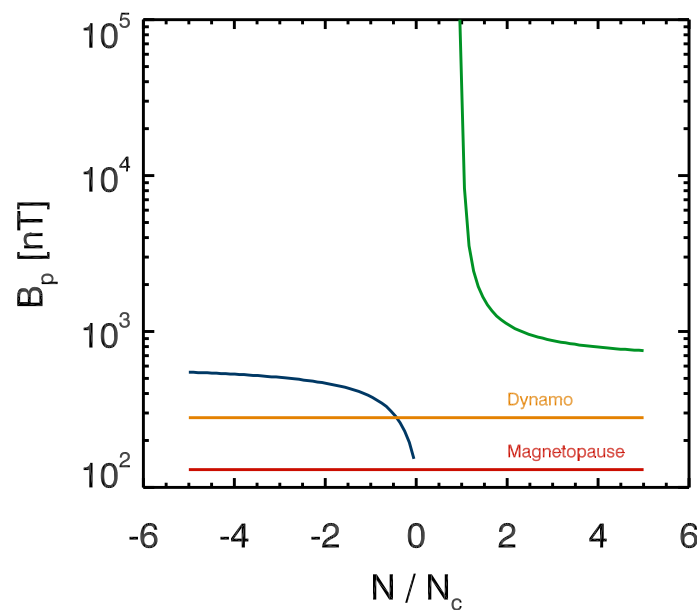


Abbildung 6.2: Planetares Dipolfeld in Abhängigkeit der normierten Dynamozahl. Die blaue Kurve markiert den Lösungsast mit einem schwachen Oberflächenfeld, während die grüne Kurve die Lösungen mit einem starken Feld anzeigt. Die rote Linie zeigt die minimale Feldstärke für eine Magnetopause oberhalb der Planetenoberfläche an. Die orangefarbene Linie markiert den Übergang von Magnetokonvektion hin zu einem echten Dynamoprozess. Abbildung nach Glassmeier et al. (2007).

6.3 Zeitabhängiges Modell: kinematisches Modell zum planetaren Feedbackdynamo

6.3.1 Mathematische Formulierung

Im vorherigen Kapitel konnte die Existenz von zwei stationären Dynamolösungen, einer starken und einer schwachen Feldlösungen, nachgewiesen werden. Eine wichtige Frage ist aber: Wie kann die Lösung mit dem schwachen Magnetfeld erreicht werden? Wie sehen die dafür notwendigen Anfangsbedingungen aus? Können alle Dynamos, egal wie stark sie durch die Heftigkeit der Konvektion getrieben werden, durch ein externes Feld in ihrem Wachstum eingeschränkt werden? Um diese Fragen zu untersuchen, wird das Modell aus dem vorherigen Kapitel erweitert, so dass die zeitliche Entwicklung eines rückgekoppelten Dynamos untersucht werden kann, ohne gleich das komplexe, vollständige MHD-System zu simulieren. Der Effekt eines externen Feldes auf einen Dynamo kann an Hand eines einfach gehaltenen $\alpha\Omega$ - Dynamomodells studiert werden. Dazu wird das Mean-Field-Dynamomodell von Schmitt und Schüssler (1989) um das externe Feld der Magnetosphäre erweitert. Dieses Modell ist rein kinematisch, daher wird das Strömungsfeld konstant vorgegeben. Dies ist gerechtfertigt wenn das Magnetfeld nicht wesentlich auf das Geschwindigkeitsfeld zurückwirkt.

Zu der konventionellen Induktionsgleichung (5.3) wird ein Term für das externe Feld

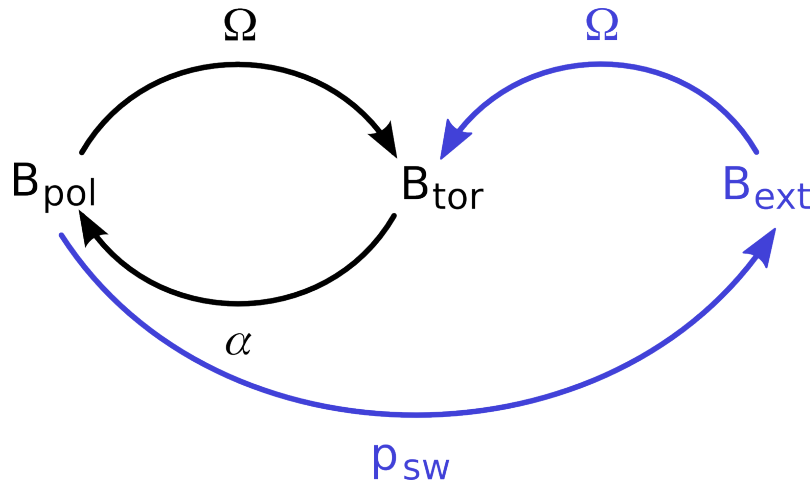


Abbildung 6.3: Schematischer Aufbau des kinematischen Feedbackdynamos. Das bekannte $\alpha\Omega$ -Schema wird um das externe Feld erweitert. Über die differentielle Rotation wird das externe, poloidale Feld in ein toroidales Feld umgewandelt. Das sich ergebende interne, poloidale Feld bestimmt in Wechselwirkung mit dem Sonnenwind die Magnetosphäre und damit wiederum das externe Feld.

$\underline{B}_{\text{ext}}$ hinzugefügt:

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \underline{\nabla} \times [\underline{v} \times (\underline{B} + \underline{B}_{\text{ext}})] + \underline{\nabla} \times \alpha \underline{B} + \eta \Delta \underline{B} \quad . \quad (6.9)$$

Vereinfachend wird vom externen Feld nur der homogene Anteil ($l = 1, m = 0$) betrachtet. Für dieses gilt

$$\Delta \underline{B}_{\text{ext}} = 0 \quad . \quad (6.10)$$

Für die Felder wird eine Darstellung in toroidalen und poloidalen Anteilen gewählt:

$$\begin{aligned} \underline{B} &= \underline{B}_{\text{pol}} + \underline{B}_{\text{tor}} \\ \underline{v} &= \underline{v}_{\text{tor}} \quad . \end{aligned} \quad (6.11)$$

Das Strömungsfeld ist auf eine Kugelschale begrenzt und ist daher rein toroidal. Das intern erzeugte Magnetfeld ist im Außenraum rein poloidal, da das toroidale Magnetfeld nicht in den Außenraum der Dynamoregion dringen kann. Eingesetzt in die Induktionsgleichung (6.9) ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{B}_{\text{tor}}}{\partial t} &= \underline{\nabla} \times [\underline{v} \times (\underline{B} + f(\underline{B}))]_{\text{pol}} + \eta \Delta \underline{B}_{\text{tor}} \\ \frac{\partial \underline{B}_{\text{pol}}}{\partial t} &= \underline{\nabla} \times (\underline{v} \times \underline{B})_{\text{tor}} + \underline{\nabla} \times \alpha \underline{B}_{\text{tor}} + \eta \Delta \underline{B}_{\text{pol}} \end{aligned} \quad (6.12)$$

f steht hier für die magnetosphärische Antwortfunktion. Das externe Feld ist ein poloidales Feld, das zusammen mit einem toroidalen Strömungsfeld ein toroidales Magnetfeld erzeugt.

Vereinfachend wird Achsensymmetrie um die Rotationsachse des Planeten eingeführt, d.h., dass alle dynamischen Größen sind unabhängig vom Azimut φ ($\partial_{\varphi} = 0$). Als Dynamoregion wird nur eine differentiell rotierende Kugelschale mit dem Radius $R_c = 1860$

km betrachtet, welcher in etwa der Kern-Mantel-Grenze entspricht (Spohn et al. 2001). Der Induktionseffekt auf Grund der differentiellen Rotation (der Ω -Effekt) sei für die Erzeugung des toroidalen Feldes weitaus bedeutender als der durch turbulente Konvektion (α -Effekt). Daher wird hier nur für die zeitliche Änderung des Poloidalfeldes ein α -Term berücksichtigt nicht jedoch für das toroidale Feld. Das Magnetfeld in der Dynamoregion wird durch

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_\varphi \end{pmatrix} = \underline{B}_{\text{tor}} + \underline{B}_{\text{pol}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} + \underline{\nabla} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

beschrieben und somit auf zwei skalare Funktionen A , das toroidale Vektorpotential in der Eichung $\underline{\nabla} \cdot \underline{A} = 0$, und B , das toroidale Magnetfeld, zurückgeführt. Die Gleichungen für deren zeitlichen Entwicklung sind

$$\begin{aligned} \partial_t A &= -\eta [\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{A})]_\varphi + \alpha B \\ \partial_t B &= -\eta [\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{B})]_\varphi + [\underline{\nabla} \times (\underline{v} \times (\underline{\nabla} \times \underline{A} + f[A]))]_\varphi \end{aligned} \quad (6.14)$$

Da nur das poloidale Magnetfeld in den Außenraum dringt, wird hier das Vektorpotential als Argument der Antwortfunktion f angesetzt. Die Größen A und B seien nur von der Polardistanz θ abhängig. In diesem Spezialfall reduziert sich der Diffusionsoperator zu:

$$\begin{aligned} [\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times (A \underline{e}_\varphi)]_\varphi &= \left[\underline{\nabla} \times \left(\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (A \sin \theta) \underline{e}_r - \frac{A}{r} \underline{e}_\theta \right) \right]_\varphi \\ &= -\frac{1}{r^2} \partial_\theta \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (A \sin \theta) \right) \end{aligned} \quad (6.15)$$

Führt man die Bezeichnung $\tilde{A} = A \sin \theta$ und $\tilde{B} = B \sin \theta$ ein, so ergibt sich für den Diffusionsanteil:

$$\begin{aligned} (\partial_t A)_{\text{diff}} &= \frac{\eta}{r^2} \partial_\theta \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \tilde{A} \right) \\ \Leftrightarrow (\partial_t \tilde{A})_{\text{diff}} &= \frac{\eta}{r^2} \sin \theta \partial_\theta \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \tilde{A} \right) \\ &= \frac{\eta}{r^2} (\partial_\theta^2 \tilde{A} - \cot \theta \partial_\theta \tilde{A}) \end{aligned} \quad (6.16)$$

Analoges gilt auch für das toroidale Magnetfeld B . Für den konvektiven Anteil müssen die Felder einzeln behandelt werden. Die Geschwindigkeit \underline{v} in Gleichung (6.14) ist in dem einfachen Modell durch eine differentiell rotierende Kugelschale

$$\underline{v} = \underline{\Omega} \times \underline{r} = r \Omega(r) \sin \theta \underline{e}_\varphi \quad (6.17)$$

gegeben. In Gleichung (6.14) wird dann der konvektive Anteil für das toroidale Magnet-

feld durch

$$\begin{aligned}
 (\partial_t \mathbf{B})_{\text{konv}} &= \left[\nabla \times \left(\underline{v} \times \left(\nabla \times \underline{A} - g_{1,\text{ext}}^0 (\underline{e}_r P_1^0 + \underline{e}_\theta \partial_\theta P_1^0) \right) \right) \right]_\varphi \\
 &= \left[\nabla \times r \Omega \sin \theta \underline{e}_\varphi \times \left(\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (A_\varphi \sin \theta) \underline{e}_r - \frac{A_\varphi}{r} \underline{e}_\theta + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + g_{1,\text{ext}}^0 (-\cos \theta \underline{e}_r + \sin \theta \underline{e}_\theta) \right) \right]_\varphi \\
 &= \left[\nabla \times \left(\Omega \partial_\theta \tilde{A} \underline{e}_\theta + \Omega \tilde{A} \underline{e}_r - g_{1,\text{ext}}^0 r \Omega (\sin \theta \cos \theta \underline{e}_\theta + \sin^2 \theta \underline{e}_r) \right) \right]_\varphi \\
 &= \frac{1}{r} \left[\partial_r (r \Omega \partial_\theta \tilde{A}) - \partial_\theta (\Omega \tilde{A}) + \partial_r (-r^2 \Omega \sin \theta \cos \theta g_{1,\text{ext}}^0) - \partial_\theta (-r \Omega \sin^2 \theta g_{1,\text{ext}}^0) \right] \\
 &= \frac{1}{r} \Omega \partial_\theta \tilde{A} + \frac{1}{r} r \Omega' \partial_\theta \tilde{A} - \frac{1}{r} \partial_\theta (\Omega \tilde{A}) + \\
 &\quad + \frac{1}{r} (-2r) \Omega \sin \theta \cos \theta g_{1,\text{ext}}^0 - r \Omega' \sin \theta \cos \theta g_{1,\text{ext}}^0 + \Omega 2 \sin \theta \cos \theta g_{1,\text{ext}}^0 \\
 &= \Omega' \partial_\theta \tilde{A} - r \Omega' \sin \theta \cos \theta g_{1,\text{ext}}^0 \\
 (\partial_t \tilde{\mathbf{B}})_{\text{konv}} &= \sin \theta \Omega' \partial_\theta \tilde{A} - r \Omega' \sin^2 \theta \cos \theta g_{1,\text{ext}}^0 \quad \text{mit} \quad \Omega' = \partial_r \Omega
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

und mit $\alpha = \alpha_0 \cos \theta$ wird die zeitliche Änderung des Vektorpotentials durch die Konvektion mittels

$$(\partial_t \tilde{A})_{\text{konv}} = \alpha_0 \tilde{B} \cos \theta \tag{6.19}$$

dargestellt. Somit ergeben sich die Induktionsgleichungen für die Felder zu:

$$\begin{aligned}
 \partial_t \tilde{A} &= \frac{\eta}{r^2} (\partial_\theta^2 \tilde{A} - \cot \theta \partial_\theta \tilde{A}) + \alpha_0 \cos \theta \tilde{B} \\
 \partial_t \tilde{B} &= \frac{\eta}{r^2} (\partial_\theta^2 \tilde{B} - \cot \theta \partial_\theta \tilde{B}) + \sin \theta \Omega' \partial_\theta \tilde{A} - r \Omega' \sin^2 \theta \cos \theta g_{1,\text{ext}}^0
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Um nun die Gleichungen zu entdimensionalisieren wird folgende Transformation eingeführt:

$$\begin{aligned}
 \tilde{B} &= B_0 \hat{B} \\
 \tilde{A} &= B_0 R_c \hat{A} \\
 r &= R_c \\
 \eta &= \eta_0 \\
 g_{1,\text{ext}}^0 &= B_0 \hat{g}_{1,\text{ext}}^0 \\
 t &= \tau_{\text{diff}} \hat{t} = \frac{R_c^2}{\eta_0} \hat{t}
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

Die Skala, die durch B_0 festgelegt wird, ist willkürlich. Diese Transformation verändert die Gleichungen (6.20) zu

$$\begin{aligned}
 \partial_{\hat{t}} \hat{A} &= \partial_{\hat{\theta}}^2 \hat{A} - \cot \theta \partial_{\hat{\theta}} \hat{A} + \alpha_0 \frac{R_c}{\eta_0} \cos(\theta) \hat{B} \\
 \partial_{\hat{t}} \hat{B} &= \partial_{\hat{\theta}}^2 \hat{B} - \cot \theta \partial_{\hat{\theta}} \hat{B} + \Omega' \frac{R_c^3}{\eta_0} \sin(\theta) (\partial_{\hat{\theta}} \hat{A} - \sin \theta \cos \theta \hat{g}_{1,\text{ext}}^0)
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Nun sei weiterhin

$$\begin{aligned}
R_\alpha &= \alpha_0 \frac{R_c}{\eta_0} \\
R_\Omega &= \Omega' \frac{R_c^3}{\eta_0} \\
\hat{A} &= R_\alpha \hat{\hat{A}} \\
\hat{g}_{1,\text{ext}}^0 &= R_\alpha \hat{g}_{1,\text{ext}}^0 \\
P &= R_\alpha R_\Omega = \alpha_0 \Omega' \frac{R_c^4}{\eta_0^2} .
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Damit ergeben sich die vollständig entdimensionalisierten Induktionsgleichungen

$$\begin{aligned}
\partial_i \hat{A} &= \partial_\theta^2 \hat{\hat{A}} - \cot(\theta) \partial_\theta \hat{\hat{A}} + \cos(\theta) \hat{B} \\
\partial_i \hat{B} &= \partial_\theta^2 \hat{B} - \cot(\theta) \partial_\theta \hat{B} + P \sin(\theta) (\partial_\theta \hat{\hat{A}} - \sin \theta \cos \theta \hat{g}_{1,\text{ext}}^0) .
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Das externe Feld der Magnetopausenströme kann natürlich nur berechnet werden, wenn das Feld des Dynamos im Außenraum der Dynamozone bekannt ist. Direkt im Anschluss zur Dynamozone wird das Magnetfeld als internes Potentialfeld betrachtet. Aus dem Magnetfeld wird durch eine sphärisch-harmonische Analyse (s. Kapitel 2.3) das Dipolfeld bestimmt. Ein möglicher Einfluss durch den umgebenden, bedingt elektrisch leitfähigen Mantel wird ignoriert.

6.3.2 Numerische Behandlung des kinematischen Dynamomodells

Das Gleichungssystem (6.24) kann mit der Methode der finiten Differenzen numerisch gelöst werden. Da das Modell achsensymmetrisch ist, muss nur ein Meridian stellvertretend für die ganze Sphäre numerisch behandelt werden. Die im Modell vorhandenen Größen werden auf einem numerischen Gitter diskret behandelt. Dabei entspricht der Index i dem Ort (θ) und der Index n der Zeit (t). Für die Ableitung nach der Zeit wird die Vorwärtsdifferenz angesetzt und für die Ableitung nach dem Ort eine zentrale Differenz. Für die Stabilisierung des Gesamtverfahrens wird für die Behandlung der zweiten Ableitung im Diffusionsoperator ein implizites Verfahren benutzt, dass für einen Zeitschritt die Lösung eines linearen Gleichungssystems erfordert. Dies ist jedoch relativ leicht und effizient zu bewältigen, da die beteiligte Matrix nur in der Haupt- und in den Nebendiagonalen besetzt und für jeden Zeitschritt konstant ist.

Diskretisierung des Gleichungssystems (6.24) ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{A_i^{n+1} - A_i^n}{\Delta t} &= \frac{A_{i+1}^{n+1} - 2A_i^{n+1} + A_{i-1}^{n+1}}{\Delta \theta^2} - \cot(\theta_i) \frac{A_{i+1}^{n+1} - A_{i-1}^{n+1}}{2\Delta \theta} + \cos(\theta_i) B_i^n \\
\frac{B_i^{n+1} - B_i^n}{\Delta t} &= \frac{B_{i+1}^{n+1} - 2B_i^{n+1} + B_{i-1}^{n+1}}{\Delta \theta^2} - \cot(\theta_i) \frac{B_{i+1}^n - B_{i-1}^n}{2\Delta \theta} + \\
&\quad + P \sin(\theta_i) \left(\frac{A_{i+1}^n - A_{i-1}^n}{2\Delta \theta} - \sin(\theta_i) \cos(\theta_i) g_{1,\text{ext}}^0 \right)
\end{aligned} \tag{6.25}$$

und sortiert nach Zeitschritten

$$\begin{aligned}
 \frac{A_i^{n+1}}{\Delta t} - \frac{A_{i+1}^{n+1} - 2A_i^{n+1} + A_{i-1}^{n+1}}{\Delta \theta^2} + \cot(\theta_i) \frac{A_{i+1}^{n+1} - A_{i-1}^{n+1}}{2\Delta \theta} &= \cos(\theta_i) B_i^n + \frac{A_i^n}{\Delta t} \\
 \frac{B_i^{n+1}}{\Delta t} - \frac{B_{i+1}^{n+1} - 2B_i^{n+1} + B_{i-1}^{n+1}}{\Delta \theta^2} + \cot(\theta_i) \frac{B_{i+1}^{n+1} - B_{i-1}^{n+1}}{2\Delta \theta} &= \\
 \underbrace{\frac{B_i^n}{\Delta t} + P \sin(\theta_i) \left(\frac{A_{i+1}^n - A_{i-1}^n}{2\Delta \theta} - \sin(\theta_i) \cos(\theta_i) g_{1,\text{ext}}^0 \right)}_{n} & \quad (6.26)
 \end{aligned}$$

Nun werden beide Gleichungen mit Δt multipliziert und die linke Seite nach dem Ort i sortiert

$$\begin{aligned}
 \left(-\frac{\Delta t}{\Delta \theta^2} - \frac{\Delta t}{2\Delta \theta} \cot(\theta_i) \right) A_{i-1}^{n+1} + \left(1 + 2\frac{\Delta t}{\Delta \theta^2} \right) A_i^{n+1} + \\
 \left(-\frac{\Delta t}{\Delta \theta^2} + \frac{\Delta t}{2\Delta \theta} \cot(\theta_i) \right) A_{i+1}^{n+1} &= \Delta t \cos(\theta_i) B_i^n + A_i^n \\
 \left(-\frac{\Delta t}{\Delta \theta^2} - \frac{\Delta t}{2\Delta \theta} \cot(\theta_i) \right) B_{i-1}^{n+1} + \left(1 + 2\frac{\Delta t}{\Delta \theta^2} \right) B_i^{n+1} + \\
 \left(-\frac{\Delta t}{\Delta \theta^2} + \frac{\Delta t}{2\Delta \theta} \cot(\theta_i) \right) B_{i+1}^{n+1} &= P \Delta t \sin(\theta_i) \left(\frac{A_{i+1}^n - A_{i-1}^n}{2\Delta \theta} - \sin(\theta_i) \cos(\theta_i) g_{1,\text{ext}}^0 \right) + B_i^n \quad (6.27)
 \end{aligned}$$

Die linke Seite dieser Gleichungen lässt sich in Matrixnotation durch $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{A}^{n+1}$ ausdrücken (für B analog). Die Matrix $\underline{\underline{A}}$ ist über alle Zeitschritte konstant. Durch Matrixinversion lässt sich die Entwicklung des Systems ausgehend von einem Saatfeld berechnen. An den Polen verschwindet sowohl das toroidale als auch das poloidale Magnetfeld, damit die Felder und die Stromdichten endliche Werte besitzen. Daher ist

$$B_1 = A_1 = 0 \quad (6.28)$$

$$B_I = A_I = 0 \quad (6.29)$$

6.3.3 Modellierungsergebnisse

Die in diesem Kapitel vorgestellten Ergebnisse der Modellierungen sind in Heyner et al. (2010) veröffentlicht worden. Ohne externes Magnetfeld wächst das vom Dynamo erzeugte Magnetfeld an wenn die Dynamozahl einen kritischen Wert von $P_{\text{crit}} = 46$ überschreitet. Unterhalb dieser Dynamozahl zerfällt lediglich das Saatfeld. Für viel größere Werte als 46 beginnt der Dynamo zu oszillieren. Hier werden zunächst nur monoton wachsende, dipolare Dynamos im Bereich $P_{\text{crit}} < P < 70$ betrachtet. Für die Dynamozahlen 47 (schwach überkritisch) und 60 (stark überkritisch) ist die zeitliche Entwicklung des Dynamomodells in Abbildung 6.4 dargestellt. Konkret ist dort die zeitliche Entwicklung des internen, achsensymmetrischen Dipolkoeffizienten in Abhängigkeit von der Zeit skaliert in Diffusionszeiten (s. Gleichung (5.12)). Bei konsistenteren Dynamomodellen mit Rückwirkung der Lorentzkraft auf die Strömung wird das Wachstum des Dynamos durch

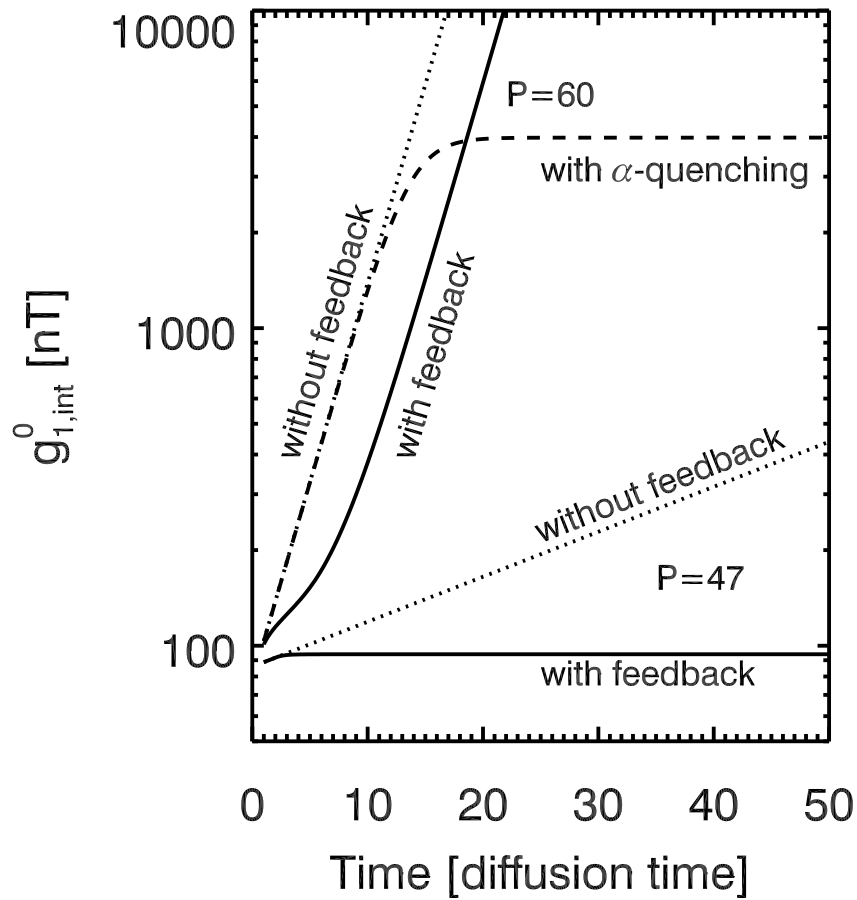


Abbildung 6.4: Vergleich der zeitlichen Entwicklungen des Dynamomodells für die Dynamozahlen 47 und 60. Mit gepunkteten Linien sind die Fälle ohne externes Feld und mit durchgezogenen Linien die Fälle mit externem Feld dargestellt. Der Effekt des α -quenchings wurde beispielhaft für den stark überkritischen Fall berechnet (gestrichelten Linie). Abbildung aus Heyner et al. (2010).

die gegen die Lorentzkraft geleistete Arbeit begrenzt. Eine Sättigung stellt sich dann ein, wenn die Lorentzkraft dynamisch genauso bedeutend ist wie die Corioliskraft. Diesen Effekt kann man natürlich mit einem kinematischen Dynamomodell nicht ohne weiteres darstellen. Ein überkritischer Dynamo wächst hier in diesem Modell über alle Grenzen (gepunktete Linien in Abbildung 6.4).

Die Stärke des externen Feldes wird hier durch die magnetosphärische Antwortfunktion $f_{\text{TS96_subsolar}}$ approximiert. Dadurch, dass das Modell immer mit einem sehr schwachen Magnetfeld initialisiert wird, kann sich der Dynamo zunächst ungestört durch das externe Feld entwickeln. Erst wenn die Magnetfeldamplitude soweit angewachsen ist, dass der magnetische Druck ausreicht, um eine Magnetopause oberhalb der Planetenoberfläche auszubilden, beginnt der Einfluss des externen Feldes, und es stellt sich ein stationärer Zustand ein. Dabei hängt die finale Dipolfeldstärke von der Dynamozahl ab. Wenn die Dynamozahl zu groß gewählt ist ($P \geq 54,7$), reicht aber das externe Feld nicht aus, und der Dynamo kann nach einer gewissen Verzögerungszeit wieder ungestört anwachsen. Die Antriebstärke des Dynamos und das externe Feld wirken also gegeneinander. Der

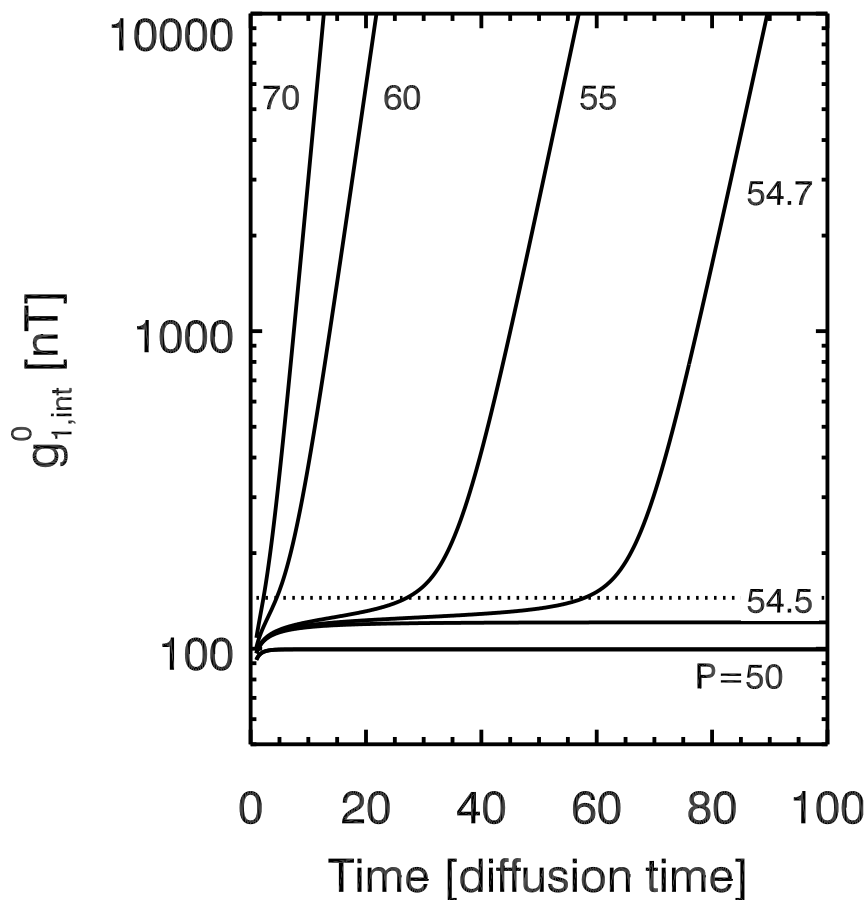


Abbildung 6.5: Vergleich der zeitlichen Entwicklungen des Dynamomodells für verschiedene Dynamozahlen mit eingeschaltetem externen Feld. Abbildung aus Heyner et al. (2010).

Übergang zwischen beeinflussbaren und nicht-beeinflussbaren Dynamos wurde in einer Parameterstudie näher untersucht und die Ergebnisse in Abbildung 6.5 dargestellt. Für die Dynamozahlen 50 und 54 zeigt sich auch, dass die Zeit bis zur Sättigung des Dynamos umso größer ist, je stärker der Dynamo durch die Konvektion getrieben wird - der Dynamo mit $P = 50$ wird nach ca. 5 Diffusionszeiten während der mit $P = 54,4$ erst nach ca. 25 Diffusionszeiten stabilisiert wird. Die letztendlichen Feldstärken unterscheiden sich auch um ca. 45 nT. Wenn die Dynamozahl größerer ist als 54,5, kann der Dynamo nicht mehr durch das externe Feld begrenzt werden und der Dipolkoeffizient erreicht schnell (je nach Dynamozahl) Werte von 10000 nT und mehr. Dieses unbegrenzte Anwachsen wird durch das externe Feld nur verzögert. Ab einer Dynamozahl von mehr als 70 ist diese Verzögerungszeit praktisch gleich Null.

Das Lösungsverhalten des Dynamos ist in gewisser Weise auch von der Anfangsfeldstärke abhängig. Sehr schwach initialisierte Dynamos haben immer die gleiche Asymptote, allerdings dauert es umso länger, bis die stationäre Lösung erreicht ist, je schwächer der Dynamo initialisiert ist. Auch wenn das Startfeld stärker als ist als der asymptotische Wert kann der Dynamo stabilisiert werden. Allerdings wenn das Saattfeld eine gewisse Stärke überschreitet, kann das externe Feld die Entwicklung nicht mehr beeinflussen und der Dynamo wächst ähnlich wie bei einem stark angeregten Dynamo über alle Grenzen.

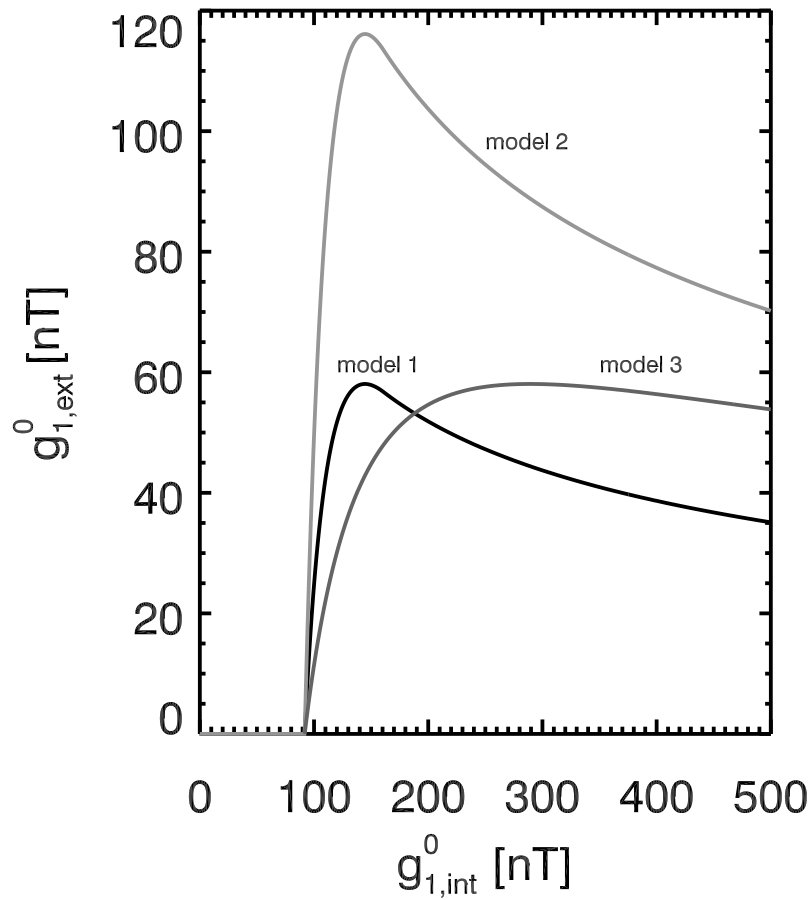


Abbildung 6.6: Vergleich der ursprünglichen mit den abgewandelten magnetosphärischen Antwortfunktionen. Abbildung aus Heyner et al. (2010).

Durch sogenannte *quenching*-Effekte wie dem magnetischen Auftrieb oder α -*quenching* (Schmitt und Schüssler 1989) kann das Wachstum eines überkritischen Dynamos im kinematischen Modell begrenzt werden. Dies ist beispielhaft in Abbildung 6.4 für $P = 60$ dargestellt (gestrichelte Linie). Das externe Magnetfeld wirkt sich also auf die zeitliche Entwicklung wie das nicht-lineare α -*quenching* aus und kann die Entwicklung des Dynamos stabilisieren.

Hier konnte bisher gezeigt werden, wie die Antriebstärke des Dynamos die Entwicklung bei Antwortfunktion $f_{\text{TS96_subsolar}}$ beeinflusst. Es stellt sich nun die Frage, inwieweit die Form und Amplitude der magnetosphärische Antwortfunktion die Entwicklung des Dynamos verändert. In einer weiteren Parameterstudie wurde das Verhalten des Dynamos für zwei Abwandlungen der Antwortfunktion untersucht. Dazu wurde zum einen die Antwortfunktion doppelt so stark (*model 2*) und zum anderen das Maximum der Funktion hin zu größeren internen Feldstärken verschoben (*model 3*), wie es in Abb. 6.6 dargestellt ist. Als Referenz wurde die bisherige Antwortfunktion ebenfalls eingezeichnet (*model 1*). Die zeitliche Entwicklung des Dynamomodells für verschiedene Dynamozahlen für diese Abwandlungen der Antwortfunktion ist in Abbildung 6.7 gezeigt. Wenn man die Dynamomodelle für die Antwortfunktionen *model 1* und *model 2* vergleicht, erkennt man, dass die Breite des Lösungsbereichs (bezüglich der Dynamoahlen), bei denen der Dynamo

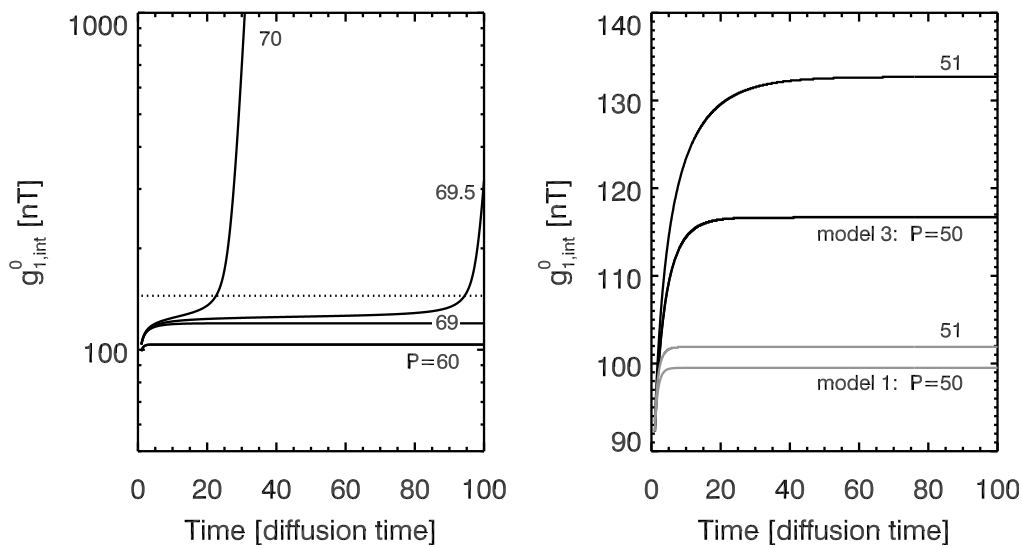


Abbildung 6.7: *Links:* Zeitliche Entwicklung des internen Dipolfeldes für verschiedene Dynamozahlen für die Antwortfunktion *model 2*. *Rechts:* Vergleich der zeitlichen Entwicklung der Dynamos mit den Dynamozahlen 50 und 51 für die Antwortfunktionen 1 und 3. Abbildung aus Heyner et al. (2010).

durch den Feedback begrenzt werden kann, von der Amplitude der ansteigenden Flanke der Antwortfunktion beeinflusst wird. Bei einem Vergleich der Antwortfunktionen *model 1* und *model 3* wird klar, dass die Sättigungsfeldstärke von der Lage (bzgl. des internen Dipolfeldes) des Maximums der Antwortfunktion abhängt. Je größer das interne Dipolfeld ist, bei dem das externe Dipolfeld das Maximum erreicht, desto stärker ist das Dipolfeld in der Sättigung.

In Zukunft kann mit diesem Modell auch ein stärker angeregter Dynamo mit komplexerem Modenspektrum untersucht werden. Wenn das interne Dipolfeld auch zu oszillieren beginnt, ergibt sich eventuell wie bei Darah und Sarson (2007) (vgl. Kapitel 6.1) eine völlig neue Situation. Dabei ist im Fall des magnetosphärischen Feedbacks die Frequenz des externen Feldes gleich dem des internen, allerdings kann sich auf Grund der endlichen Kommunikationszeit eine Phasendifferenz herausstellen. Die Dicke der Dynamozone, die im wesentlichen durch den inneren Kern vorgegeben wird, spielt dabei die entscheidende Rolle. Die Auswirkungen dieser Phasendifferenz könnte man im kinematischen Modell mittels einer zeitlichen Verzögerung in der Antwortfunktion modellieren.

6.4 Analytische Analyse eines kinematischen Dynamos mit einem externen Feld

Nach der Betrachtung der zeitlichen Entwicklung eines kinematischen Dynamos unter dem Einfluss eines externen Feldes im Hinblick auf die Merkursituation soll nun untersucht werden, wie die einzelnen Parameter der magnetosphärischen Antwortfunktion die Entwicklung des Feedbackdynamos beeinflussen. Dies ist einer erster Schritt zur Verallgemeinerung des Feedbackmodells, da somit auch andere Situationen studiert werden können, wie zum Beispiel der Merkur in der Frühzeit des Sonnensystems als noch an-

dere Sonnenwindbedingungen herrschten. Außerdem ist noch nicht klar, wie stabil die stationären Lösungen des Feedbackdynamos sind. Dazu wird das Modenspektrum des Dynamos stark eingeschränkt. Mit dieser Vereinfachung ist es möglich, das Problem analytisch zu betrachten und damit allgemeinere Aussagen zu treffen. Die hier enthaltenen Analyseergebnisse sind in Heyner et al. (2011a) publiziert.

6.4.1 Das vereinfachte Grundmodell des kinematischen Feedbackdynamos

Das Ausgangsmodell für den kinematischen Dynamo ist wieder durch das aus der Induktionsgleichung stammende Gleichungssystem (6.24). Aber hier soll nun statt der sphärischen Formulierung auf eine einfachere kartesische Formulierung zurückgegriffen werden. Das entstehende Gleichungssystem enthält durch die Einführung kartesischer Koordinaten weniger Terme und ist damit einfacher analytisch zu betrachten. Die Koordinaten (x, y, z) entsprechen der Poldistanz (mit $x = 0$ als Nordpol, $x = \pi/2$ als Äquator und $x = \pi$ als Südpol), dem Azimuth und der radialen Richtung. Das Gleichungssystem (6.24) hat dann folgende Form:

$$\begin{aligned}\dot{A} &= A'' + B \cos x \\ \dot{B} &= B'' + P \sin x (A' - g_{1,\text{ext}}^0 \cos x) \quad .\end{aligned}\quad (6.30)$$

Hier sind die Abkürzungen $\dot{} = \partial_t$ und $' = \partial_x$ eingeführt. Die Lösungen dieses Gleichungssystems verhalten sich qualitativ ähnlich wie die Lösungen des sphärischen Ansatzes. Das externe Feld wird durch den $g_{1,\text{ext}}^0$ - Gauss-Koeffizienten beschrieben, der dem internen Dipol entgegengerichtet ist. Dieser Term ist der wesentliche Unterschied zu dem Modell von Schmitt und Schüssler (1989), macht das Gleichungssystem inhomogen und erzeugt, wie im letzten Kapitel dargestellt, völlig neue Lösungen des Dynamomodells.

Ohne diesen externen Term ist das Gleichungssystem linear. Die Lösungen sind von Schmitt und Schüssler (1989) schon beschrieben worden, allerdings in sphärischer Geometrie. Die zeitliche Entwicklung der Felder ist proportional zu

$$A, B \propto \exp(\lambda t) \quad (6.31)$$

und für antisymmetrische Moden (z.B. dipolare) ist sie für verschiedene Dynamozahlen P in Abbildung 6.8 dargestellt. In sphärischer Geometrie ist 46 die kritische Dynamozahl (Schmitt und Schüssler 1989), bei der das Wachstum der Dipolmode einsetzt, aber in kartesischer Geometrie ist sie 26. Diese Dipolmode wird ab $P = 272$ wieder zerfallen. Alle anderen auftretenden Moden sind oszillatorisch und benötigen viel größere Dynamozahlen, um anzuwachsen als hier betrachtet werden.

Hier wird das Lösungsspektrum auf die Moden beschränkt, die ein Magnetfeld antisymmetrisch (wie ein Dipol) zum Äquator erzeugen. Die Reihenentwicklungen in Zerfallsmoden (harmonische Moden der Diffusionsgleichung) wird der Einfachheit halber nach dem ersten Glied abgebrochen:

$$\begin{aligned}A(x, t) &= \sum_{i=1,3,\dots} a_i(t) \sin(ix) \approx a(t) \sin x \\ B(x, t) &= \sum_{i=2,4,\dots} b_i(t) \sin(ix) \approx b(t) \sin(2x) \quad .\end{aligned}\quad (6.32)$$

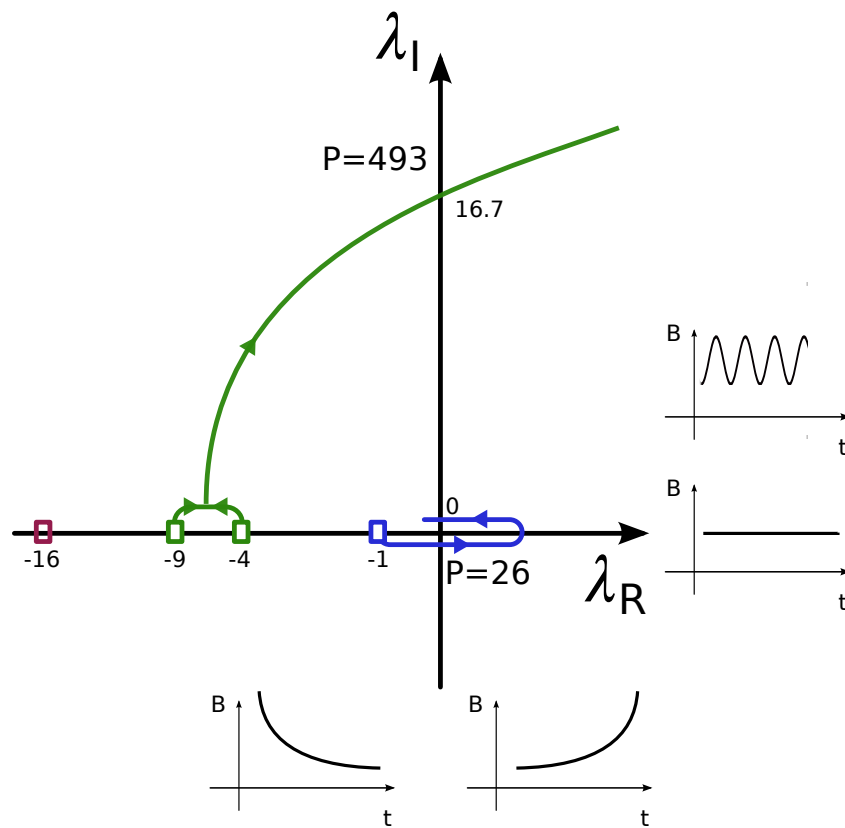


Abbildung 6.8: Schema der komplexen Zahlenebene der Eigenwerte λ der Dynamolösungen für eine Dynamozahl $P \geq 0$. Auf der Ordinate ist der Realteil λ_R und auf der Abszisse der Imaginärteil λ_I aufgetragen. P wächst in Pfeilrichtung an und je nach Größe werden unterschiedliche Moden angeregt wie durch die farbigen Linien dargestellt ist. Für $\lambda_R < 0$ erhält man zerfallende Lösungen und anwachsende für $\lambda_R > 0$. Für $\lambda_I > 0$ oszillieren die Lösungen während sie sich monoton für $\lambda_I = 0$ verhalten. Die erste, monotone Mode wächst für $P \geq 26$ während die erste oszillatorische Mode erst ab $P = 493$ anwächst. Abbildung nach Schmitt und Schüssler (1989).

Mit diesem Ansatz gelangt man zu einem Gleichungssystem für die Koeffizienten:

$$\dot{a} = -a + \frac{b}{2} \quad (6.33)$$

$$\dot{b} = -4b + \frac{P}{2} (a - g_{1,\text{ext}}^0) \quad (6.34)$$

Mit der letzten Gleichung ist sofort ersichtlich, wie das externe Feld in das Modell eingreift. Das externe Feld der Magnetosphäre reduziert die Wirkung der differentiellen Rotation, die aus dem poloidalen Feld ein toroidales erzeugt. Die Gesamteffektivität des Dynamos wird damit reduziert.

Zeitliches Differenzieren von (6.33), Ersetzen von \dot{b} und Verwenden von $\dot{a} = \lambda a$ und $\ddot{a} = \lambda^2 a$ ergibt eine charakteristische Gleichung für den Eigenwert λ :

$$\lambda^2 + 5\lambda + (4 - P/4) = 0 \quad (6.35)$$

Für $\lambda = 0$ ergibt sich gerade die kritische Dynamozahl von $P_{\text{crit}} = 16$ während sie für das vollständige System 26 ist.

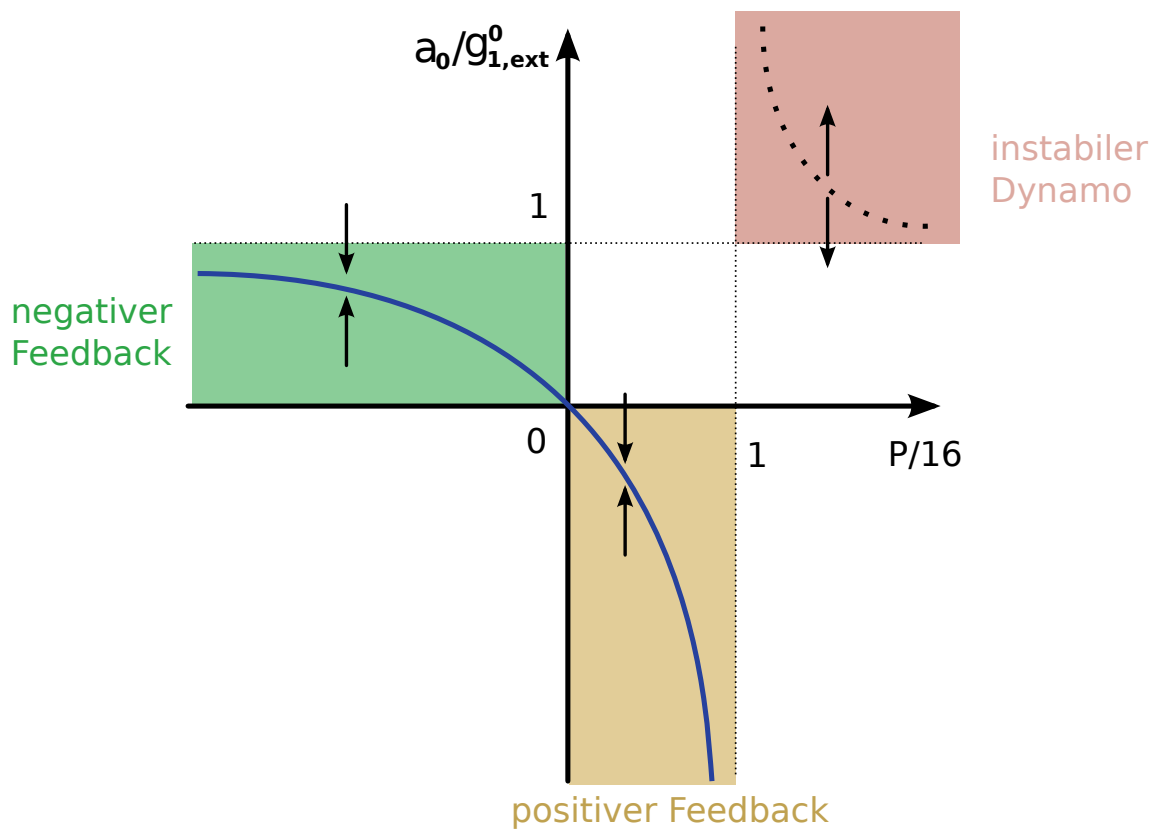


Abbildung 6.9: Schema der Lösungsäste für ein konstantes externes Feld. Die Dynamozahl P auf der Ordinate ist hier auf die kritische normiert und auf der Ordinate ist das Verhältnis der internen Dipolstärke a_0 und der Stärke des externen Dipols aufgetragen. Abbildung nach Heyner et al. (2011a).

6.4.2 Vereinfachter kinematischer Dynamo mit konstantem externen Feld

Aus den Gleichungen (6.33) und (6.34) folgt, dass für stationäre Lösungen

$$\begin{aligned} b_0 &= 2a_0 \\ \frac{a_0}{g_{1,\text{ext}}^0} &= \frac{P}{P-16} \end{aligned} \quad (6.36)$$

gelten muss. Hieraus ist ersichtlich, dass neben der Dynamozahl das Verhältnis vom internen zum externen Feld entscheidend für die Dynamolösung ist und nicht nur die externe Feldstärke allein. Die beiden Lösungsäste für den Feedbackdynamo ergeben sich durch die Gleichung (6.36) und sind in Abbildung 6.9 eingezeichnet. Die Lösungen mit $P > 16$ sind instabil. Eine kleine Abweichung von der exakten Lösung lässt das Magnetfeld des Dynamos anwachsen, bis eventuell ein nicht-linearer Sättigungseffekt einsetzt, der in diesem Modell nicht enthalten ist. Der Ast mit einem $a_0/g_{1,\text{ext}}^0 < 0$ Verhältnis, ist ein positiv rückgekoppelter, subkritischer Fall, der als Magnetokonvektion zu verstehen ist - ohne das externe Feld zerfällt das Magnetfeld. Die Lösungen mit $P < 0$ entsprechen einem negativ rückgekoppelten Dynamo mit schwachem Magnetfeld. Diese Lösung wurde zuerst

von Levy (1979) angegeben und von Glassmeier et al. (2007) aufgegriffen und dort *weak-field branch* genannt. Dieser Name sollte nicht mit den aus der Dynamotheorie bekannten *weak-field dynamos* verwechselt werden, was auf ein bestimmtes Kräftegleichgewicht im Kern hindeutet (s. Kapitel 5.5). Bei diesen *weak-field* Dynamos ist allerdings das externe Feld stets größer als das interne ($a_0/g_{1,\text{ext}}^0 < 1$) - dies ist für die Merkursituation unrealistisch und könnte auch als Grenzfall der Magnetokonvektion bezeichnet werden. Der Dynamoprozess kommt allerdings hier nicht zum Erliegen, wenn das externe Feld abgeschaltet wird.

6.4.3 Vereinfachter kinematischer Dynamo mit variablem externen Feld

Im Allgemeinen kann das externe Feld auch vom internen abhängen wie es im Kapitel 3 über die Antwortfunktionen dargestellt ist. Dies verändert die Lösungen des kinematischen Dynamos erheblich.

Im Kapitel 3.5 wurde mit starken Vereinfachungen eine Antwortfunktion speziell für den heutigen Merkur entwickelt (s. (3.33) und Abbildung 3.10). Mit dieser Art der Antwortfunktion verläuft die Entwicklung eines Dynamomodells wie folgt: Der Dynamo wird mit einem schwachen Saatfeld initiiert und wächst exponentiell für überkritische Dynamozahlen. Wenn das Oberflächenfeld einen Wert von etwa 100 nT erreicht, kann sich eine Magnetopause ausbilden und das externe Feld beginnt auf den Dynamo einzuwirken. Damit kann das Wachstum des Dynamos gestoppt werden (s. Abbildung 6.5). Wenn allerdings die Dynamozahl zu groß ist (die Effektivität des Dynamos also groß ist), kann das Dynamowachstum nicht begrenzt werden. Wenn das Saatfeld zu groß ist, kann der Dynamo ebenfalls nicht durch das externe Feld stabilisiert werden. Ein kleiner Einblick in die Abhängigkeit der Dynamoentwicklung von den Antwortfunktionsparametern wurde im Kapitel 6.3 über numerische Experimente gegeben, aber diese Methode ergab nur ein grobes Bild.

Um das Verhalten des Feedbackdynamos besser zu verstehen, werden hier nun zwei verschiedene experimentelle Ansätze für die Antwortfunktion diskutiert, bei denen das externe Feld vom internen abhängt. Diese ähneln in erster Näherung der $f_{\text{TS96_subsolar}}$ Funktion aus Kapitel 3.5, unterscheiden sich aber im Detail. Die hier verwendeten Funktionen haben den Vorteil, dass sie nicht zusammengesetzt sind und sich somit leichter und übersichtlicher die Auswirkungen auf den Dynamoprozess ablesen lassen können.

6.4.3.1 Analytische Antwortfunktion I

Die erste Funktion lautet

$$g_{1,\text{ext}}^0 = c_0 a \exp(-a/\zeta), \quad c_0 \geq 1 \quad (6.37)$$

und ist in Abbildung 6.10 dargestellt. Die stationären Lösungen a_0, b_0 bestimmen sich durch

$$\begin{aligned} b_0 &= 2a_0 \\ \frac{P-16}{P} &= \frac{g_{1,\text{ext}}^0}{a_0} = c_0 \exp(-a_0/\zeta) \end{aligned} \quad (6.38)$$

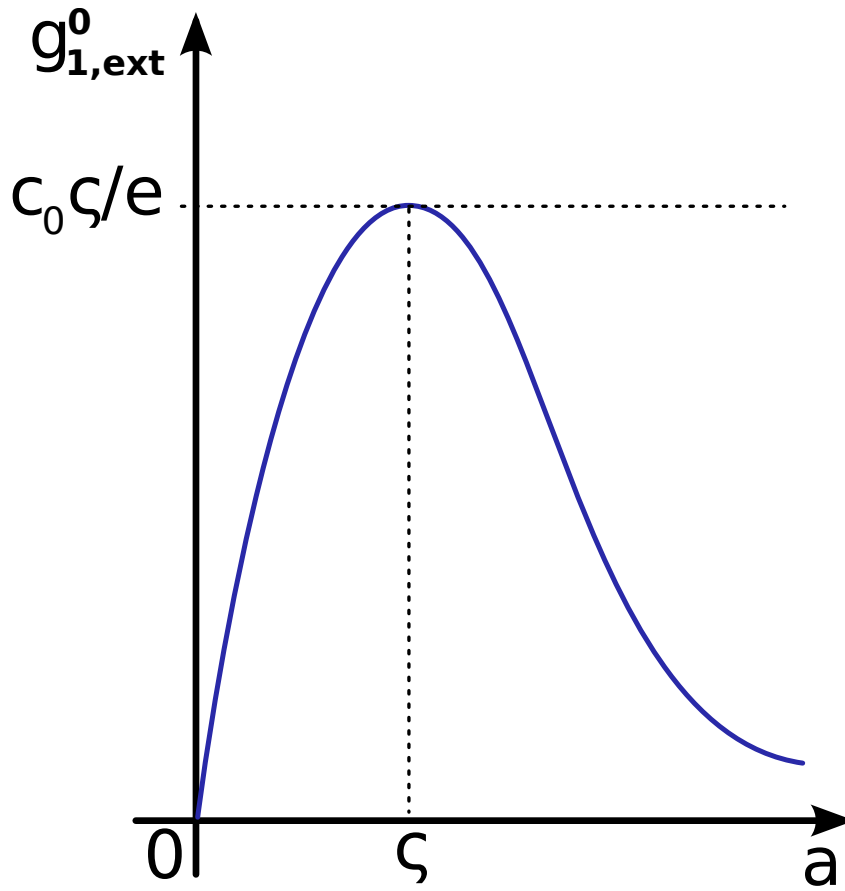


Abbildung 6.10: Schema der ersten analytischen Antwortfunktion. Diese Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Abbildung nach Heyner et al. (2011a).

Die stationäre poloidale Mode ist dann durch

$$a_0 = -\varsigma \ln \frac{P - 16}{P c_0} \quad (6.39)$$

gegeben und die verschiedenen Lösungsäste sind in Abbildung 6.11 dargestellt. Bei diesem Fall hängt es von den Parametern der Antwortfunktion ab, ob es eine stabile Lösung gibt. Für den linken Ast in 6.11, also für $P < 0$, gibt es stabile, stationäre Lösungen, allerdings nicht für $c_0 \leq 1$. Für $P > 16$ gibt es eine stationäre Lösung aber diese ist instabil - unabhängig von den Parametern der Antwortfunktion. Diese analytische Antwortfunktion verändert das Verhalten des Dynamos nur geringfügig gegenüber dem Fall eines konstanten externen Feldes.

6.4.3.2 Analytische Antwortfunktion II

Wenn der Anstieg in der Antwortfunktion quadratisch ist, verändert dies das Lösungsverhalten des Systems drastischer. Um dies darzustellen, wird als zweite analytische Antwortfunktion

$$g_{1,ext}^0 = c_0 \text{sign}(a) a^2 \exp(-a/\varsigma), c_0 > 0 \quad (6.40)$$

definiert und diese ist in Abbildung 6.12 dargestellt. Die stationären Lösungen sind durch

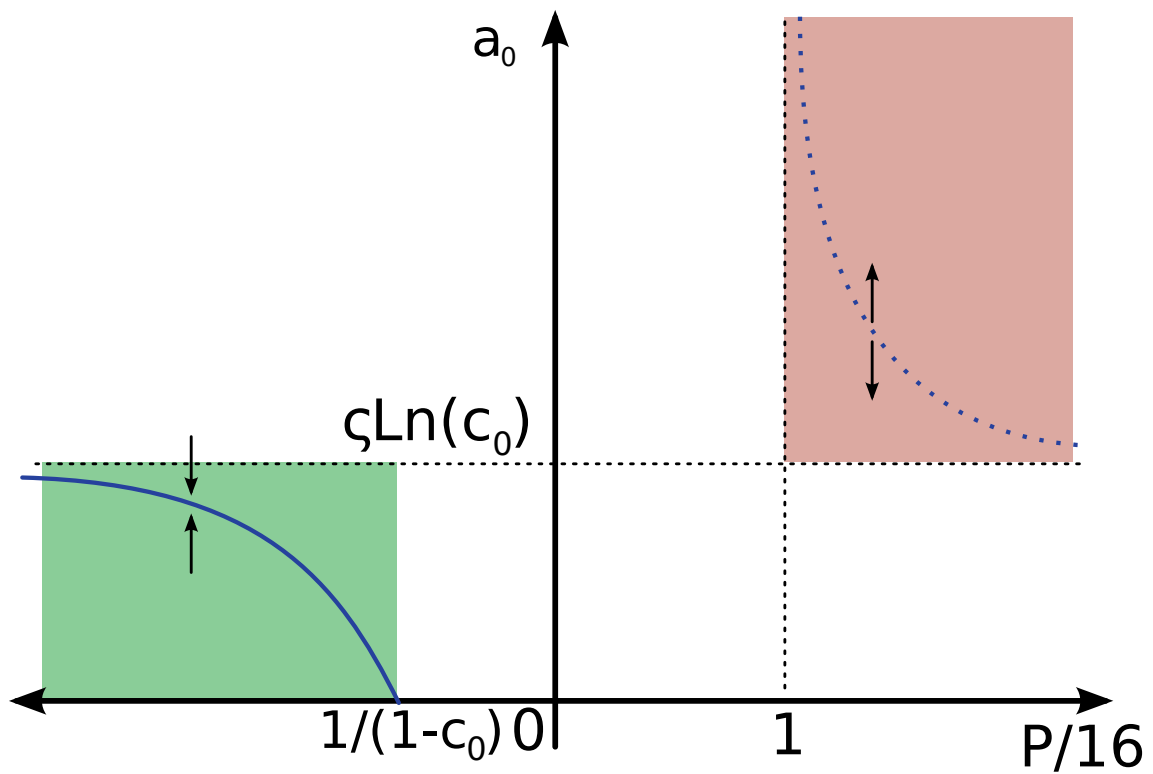


Abbildung 6.11: Stationäre Lösungen des kinematischen Dynamos mit analytischer Antwortfunktion I in Abhängigkeit der Dynamozahl und den Parametern c_0 und ς der Antwortfunktion. Abbildung nach Heyner et al. (2011a).

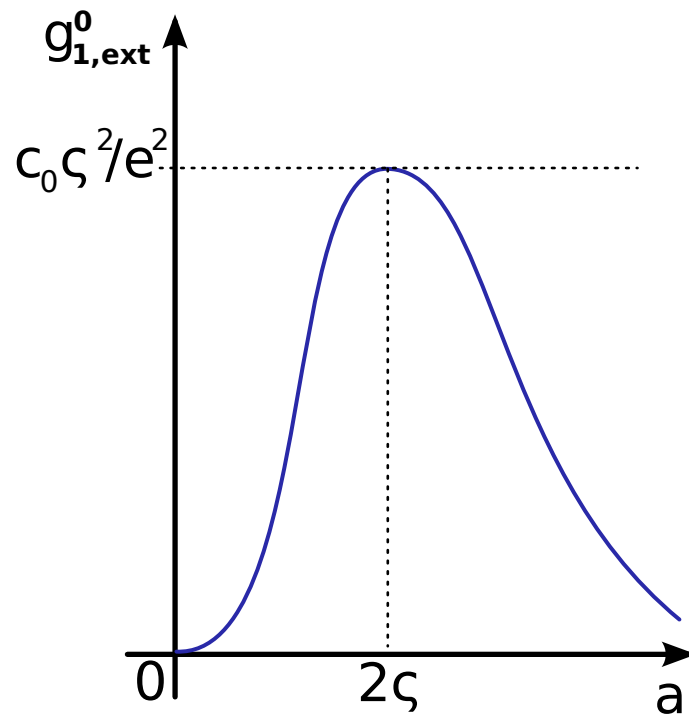


Abbildung 6.12: Schema der zweiten analytischen Antwortfunktion. Diese Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Abbildung nach Heyner et al. (2011a).

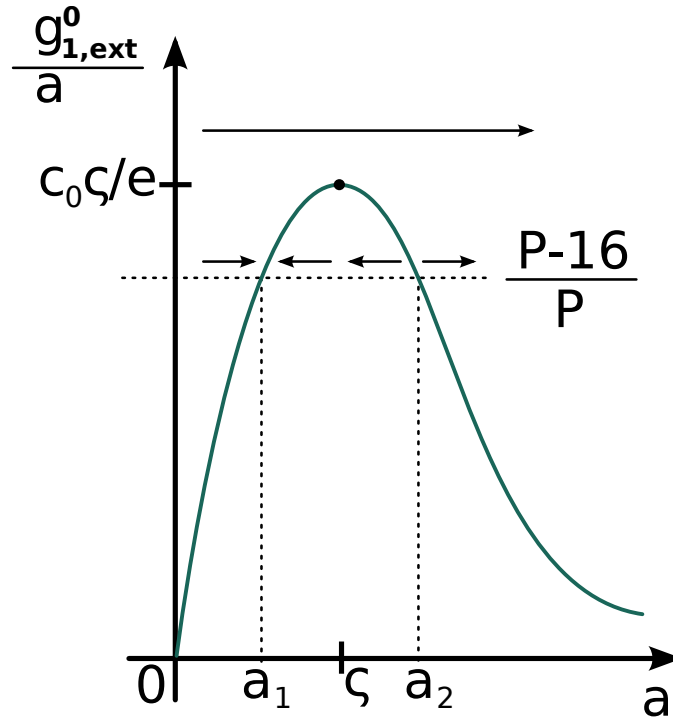


Abbildung 6.13: Schematische Darstellung des relativen externen Feldes in Abhängigkeit des internen poloidalen Dipolfeldes. Für eine feste Dynamozahl gibt es zwei stationäre Lösungen (a_1 und a_2) aber nur a_1 ist stabil, wie durch die Pfeile angedeutet. Abbildung nach Heyner et al. (2011a).

$$\begin{aligned} b_0 &= 2a_0 \\ \frac{P-16}{P} &= \frac{g_{1,ext}^0}{a_0} = c_0 a_0 \exp(-a_0/\zeta) \quad . \end{aligned} \quad (6.41)$$

gegeben. Das relative externe Feld wie in Gleichung (6.41) ist in der Abbildung 6.13 für verschiedene interne Dipolstärken dargestellt. Bis zu einem Limit von $P_{\max} = 16/(1 - c_0\zeta/e)$ gibt es zwei stationäre Lösungen a_1 und a_2 , von denen aber nur a_1 stabil ist. Wenn die Dynamozahl größer ist, kann der Feedback das Anwachsen des Dynamos nicht verhindern. Das Maximum des relativen externen Feldes in Gleichung (6.41), $c_0\zeta e^{-1}$, entscheidet über die Struktur der Lösungsäste wie sie in Abbildung 6.14 dargestellt sind. Je nachdem, ob dieses Maximum größer oder kleiner 1 und wie das Vorzeichen der Dynamozahl P ist, ergeben sich stabile bzw. instabile Lösungsäste (Tabelle 6.1). Diese zweite analytische Antwortfunktion mit dem vereinfachten kinematischen Dynamo zeigt qualitativ ein ähnliches Verhalten wie der sphärische, kinematische mit voller Modenentwicklung unter dem Einfluss der $f_{\text{TS96_subsolar}}$ -Funktion wie in Kapitel 3.5 beschrieben:

- In einem begrenzten Bereich von Dynamozahlen kann der Feedback das Wachstum des Dynamos begrenzen.
- Wenn die Anfangsfeldstärke zu groß ist, wachsen die Magnetfelder unbegrenzt an.

Das Maximum der relativen Antwortfunktion $g_{1,ext}^0/a$, $c_0\zeta e^{-1}$ bestimmt die Bandbreite der Dynamoahlen, für die eine stabile, schwache Lösung existiert. Die Breite der relativen

Tabelle 6.1: Stabilität der stationären Lösungen für die analytische Antwortfunktion II für verschiedene Parameterkonfigurationen.

	$P < 0$	$P > 16$
$c_0 \zeta e^{-1} > 1$	a_1 instabil, a_2 stabil	a_1 stabil, a_2 instabil
$c_0 \zeta e^{-1} < 1$	keine stationären Lösungen	a_1 stabil, a_2 instabil

Antwortfunktion bestimmt dann die internen Magnetfeldstärken dieser schwachen Lösungen. Da die absolute Stärke des externen Feldes im wesentlichen durch den dynamischen Druck des Sonnenwindes p_{sw} bestimmt wird, ist dieser Parameter von großer Bedeutung für das Feedbackdynamomodell.

6.5 Einfluss der Lorentzkraft: Einschätzung mit einem Scheibendynamo-Modell

Im planetaren Dynamo stellt der magnetosphärische Feedback einen neuen kinematischen Sättigungsmechanismus dar. Ein anderer Sättigungsmechanismus im Dynamosystem beruht auf der Lorentzkraft. Diese kann das Anwachsen der kinetischen Energie begrenzen und damit die Umwandlung von kinetische Energie in magnetische Energie, also den Dynamoefekt beeinflussen. Um diese Situation zu veranschaulichen, kann der einfach aufgebaute Scheibendynamo nach Bullard (1978), der in Kapitel 5.2 schon behandelt wurde, erweitert werden.

Um nun in diesem Modell einen negativen externen Feedback einzuführen, kann man ein externes Magnetfeld einführen, dass ähnlich wie bei der planetaren Situation stets

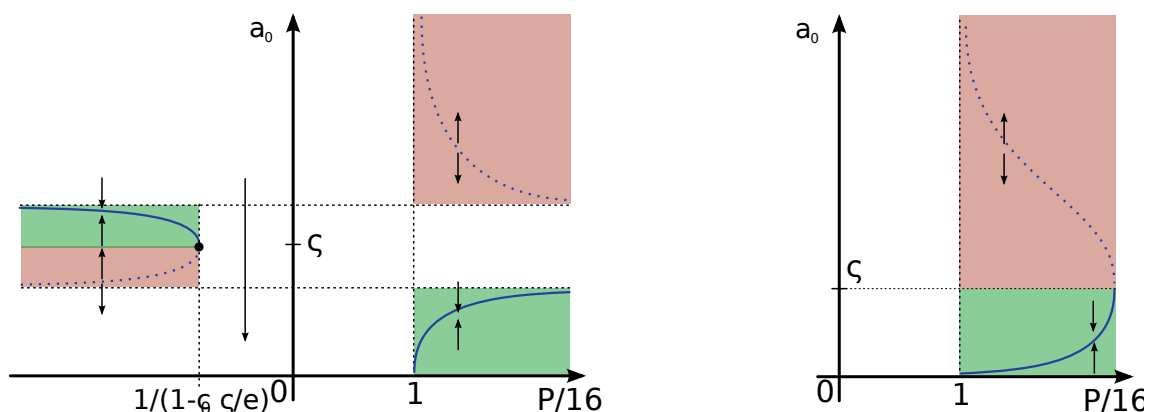


Abbildung 6.14: Stationäre Lösungen des kinematischen Dynamos mit analytischer Antwortfunktion II in Abhängigkeit der Dynamozahl und den Parametern c_0 und ζ der Antwortfunktion. Links: $c_0 \zeta e^{-1} > 1$. Rechts: $c_0 \zeta e^{-1} < 1$. Abbildung nach Heyner et al. (2011a).

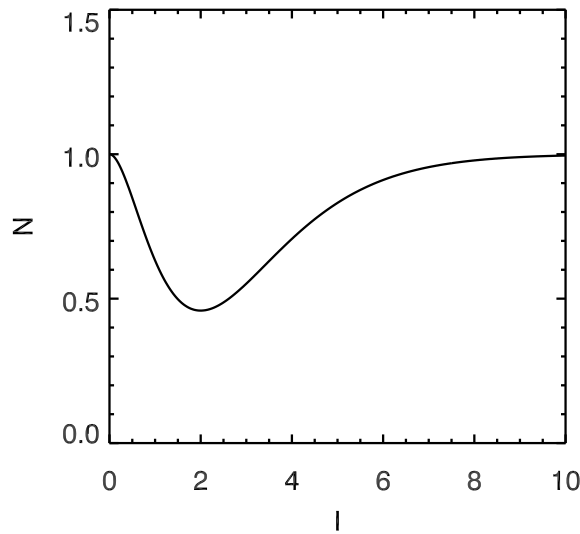


Abbildung 6.15: Die „Antwortfunktion“ in Gestalt der Wicklungszahl N in Abhängigkeit des Spulenstroms I für den Scheibendynamo.

anti-parallel zum ursprünglichen gerichtet ist. Wenn man allerdings stattdessen die Windungszahl der Spule in Abhängigkeit des Spulenstroms stellt, hat dies den gleichen Effekt wie die Überlagerung mit einem antiparallelen Feld. Dieses Verhalten kann man mit einem Ansatz

$$N(I) = N_0 - \alpha I^2 e^{-\beta I} \quad (6.42)$$

realisieren. Hier wurde eine Antwortfunktion eingearbeitet, die von der Form her der vereinfachten Version aus Kapitel 3.5 ähnelt. Zunächst sei hier der Einfachheit halber $N_0 = \alpha = \beta = 1$ angenommen. Dann ergibt sich eine Funktion wie sie in Abb. 6.15 abgebildet ist. Dann wird das DGL-System wie folgt verändert:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \left[(1 - I^2 e^{-I}) P \omega - 1 \right] I \\ \dot{\omega} &= 1 - (1 - I^2 e^{-I}) I^2 \end{aligned} \quad (6.43)$$

Die Abb. 6.16 zeigt die zeitliche Entwicklung des Scheibendynamos mit Feedback bei einem Kontrollparameter $P = 500$. Im Vergleich zum Fall ohne Feedback ist hierbei zu sehen, dass das Feedbackfeld das Gesamtmagnetfeld absenkt, damit die Lorentzkraft vermindert und schließlich dadurch das Anwachsen des Stromes bremst. Der Strom und die Rotationsgeschwindigkeit erreichen beide so ein leicht höheres Maximum. Durch die Verzögerung verlängert sich außerdem auch noch die Schwingungsperiode. Aus dem Verschwinden der zeitlichen Ableitungen ergibt sich ein stationärer Zustand bei $I_e = 1,38$ (numerisch bestimmt) und $P\omega_e = I_e^2$.

Wenn $\beta = 0,5$ gewählt wird, verschiebt sich das Minimum der Windungszahl zu $I = 4$. Die zeitliche Entwicklung ist dann durch den Feedback dominiert und es tritt eine Sättigung der Stromstärke ein. Die Rotationsgeschwindigkeit kann linear mit der Zeit anwachsen wie die Abb. 6.17 zeigt. Zusammengefasst kann hier also festgehalten werden, dass der Feedback das Anwachsen der Lorentzkraft vermindern bzw. frühzeitig beenden kann. Dadurch wird das Rotieren der Scheibe von der Magnetfelderzeugung entkoppelt. In einer Simulation des planetaren Dynamos sind die Verhältnisse jedoch komplexer und

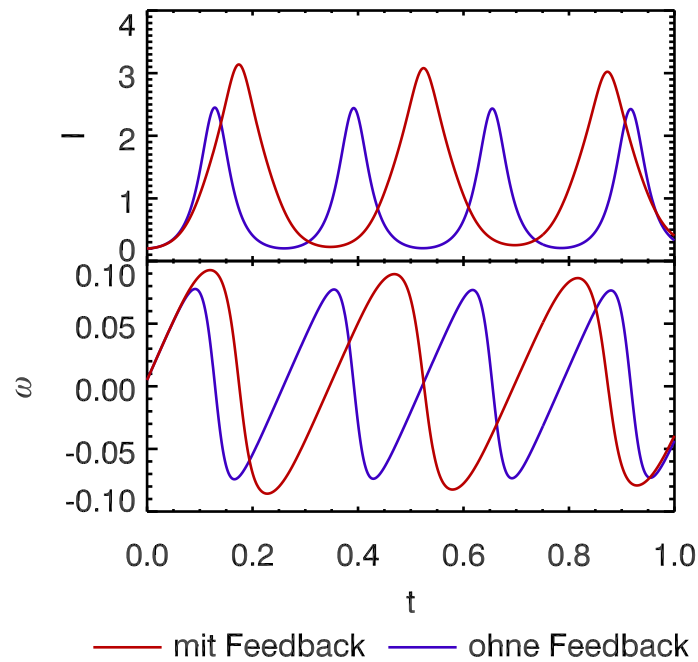


Abbildung 6.16: Zeitliche Entwicklung des Scheibendynamos mit Feedback bei einem Kontrollparameter $P = 500$. Strom und Winkelgeschwindigkeit des Dynamos mit (rot) und ohne (blau) Feedback in Abhängigkeit der Zeit.

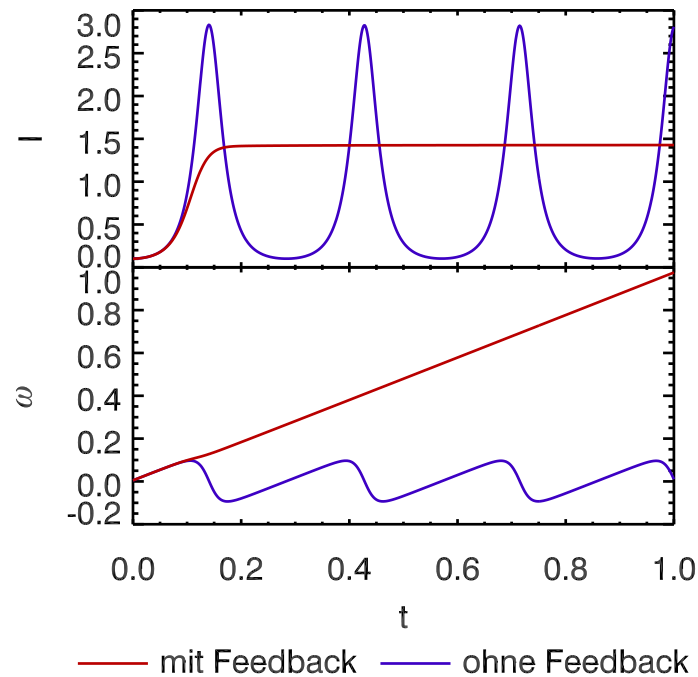


Abbildung 6.17: Zeitliche Entwicklung des Scheibendynamos mit (rot) und ohne (blau) Feedback bei einem Kontrollparameter $P = 500$ und $\beta = 0,5$.

durch die erhöhte Dimensionalität werden zusätzliche Freiheitsgrade im System möglich. So ist zum Beispiel die Bewegung nicht wie hier immer senkrecht zum Magnetfeld und die Lorentzkraft behindert nicht direkt die Konvektion sondern verändert ihr Muster. Die Auswirkungen des Feedbacks auf ein numerisches Modell eines planetaren Dynamos wird in Kapitel 7.3 studiert.

7 Dynamische Simulation des Feedbackdynamos mit einem dreidimensionalen Modell

7.1 Grundgleichungen

Die Simulationen des 3D-Dynamos mit externem Feld erfolgen mit dem sog. pseudo-spektralem Simulationsprogramm *MAGIC* (Wicht 2002, Christensen und Wicht 2007). In den genannten Quellen ist eine gute Beschreibung der verwendeten numerischen Verfahren zu finden, auf der die folgende Darstellung basiert. In dem numerischen Modell wird eine sich drehende Kugelschale (mit konstanter Winkelgeschwindigkeit) mit innerem Radius R_{ICB} und äußerem Radius R_{CMB} betrachtet, in deren Inneren sich eine inkompressible, leitfähige Flüssigkeit (Eisen-Nickel Gemisch) befindet, wie in Abbildung 7.1 dargestellt. Durch das Ausfrieren des inneren Kerns, primordiale Restwärme und eventuelle radioaktive Quellen (als volumetrische Wärmequelle) kann Wärme in diese Schale einspeist werden, so dass ab einem gewissen Grad eine Auftriebskraft entsteht, die für thermische Konvektion sorgt. Außerdem ist es möglich, die Konvektion anteilweise oder komplett durch einen Konzentrationsgradienten anzutreiben, der z.B. durch die Freisetzung eines leichten in der Flüssigkeit gelösten Elements entsteht. Außer durch die Auftriebskraft wird die Bewegung der Flüssigkeit durch verschiedene Kräfte (Coriolis-Kraft, Druckgradient-Kraft, Lorentz-Kraft und viskose Kräfte) beeinflusst und kann dabei ein Magnetfeld modifizieren. Ein Dynamo kann aus sich heraus kein Magnetfeld erzeugen, sondern ist auf ein Saatfeld angewiesen. Dadurch kann bei geeigneten Bedingungen ein selbsterhaltender Dynamo entstehen, der unabhängig vom Saatfeld oder äußeren Feldern fortbesteht. Dem konvektiven Wärme- bzw. Stofftransport ist noch eine magnetische Diffusion und Wärmeleitung überlagert, welche Unterschiede im Magnetfeld bzw. im Temperatur- oder Konzentrationsfeld abbauen. Im hier benutzten Modell werden verschiedene Annahmen gemacht, die die zu Grunde liegenden Gleichungen etwas vereinfachen. Erstens werden keine Dichteänderungen zugelassen, außer denjenigen, die zum Generieren von Auftrieb notwendig sind (Boussinesq-Näherung; für eine detailliertere Darstellung sei hier z.B. auf Spiegel und Veronis (1960) verwiesen), so werden zum Beispiel Schallwellen unterdrückt. Zweitens ist die charakteristische Geschwindigkeit der Strömung im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit so langsam, dass Verschiebungsströme vernachlässigt werden (*Prä-Maxwell*). Drittens wird die elektrische Leitfähigkeit und die kinematische Viskosität als homogen und isotrop angenommen. Viertens wird die thermische und chemische Diffusivität als gleich angenommen, so dass der unten betrach-

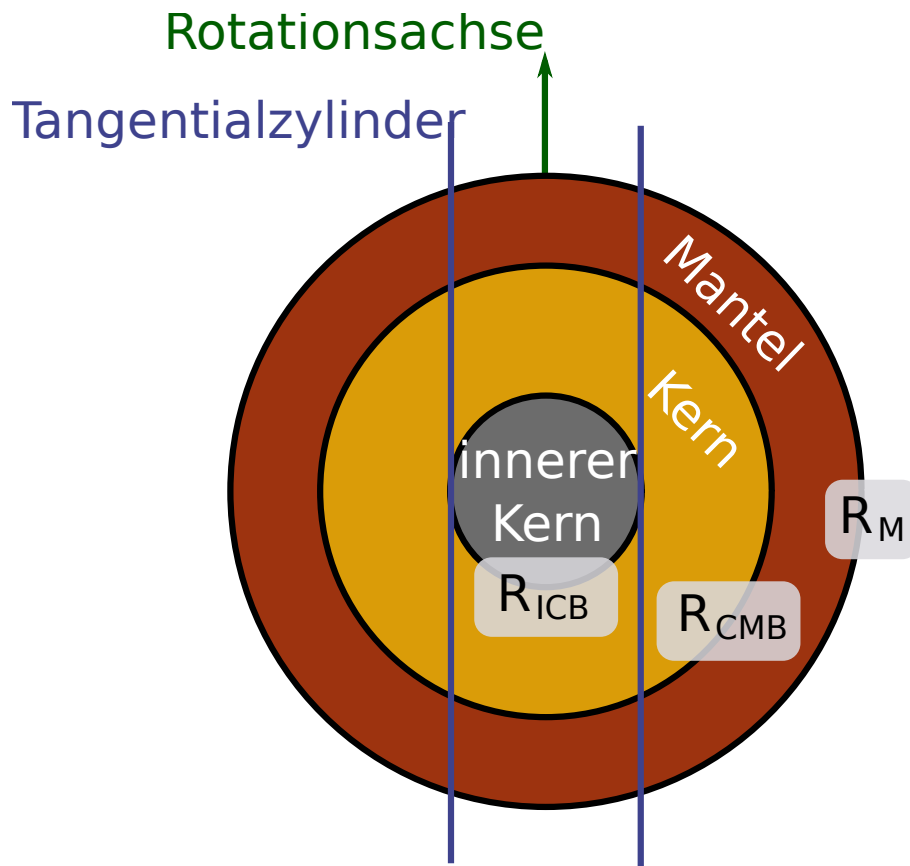


Abbildung 7.1: Modellgeometrie für die 3D-Dynamosimulationen. Die Dynamozone (flüssiger, äußerer Kern) wird innen berandet durch den inneren, festen Kern und außen durch den, auf Zeitskalen des Dynamos, starren, rotierenden Mantel.

tete Temperaturgradient gleichzeitig ein Gradient in der Konzentration von einem leichteren gelösten Element (dazu wird häufig Schwefel in Betracht gezogen) in dem Eisen-Nickel Gemisch darstellen kann (Wicht et al. 2007). Um nun die Dynamik des Anfangs-Randwertproblems zu bestimmen, werden Evolutionsgleichungen für die Geschwindigkeit (Navier-Stokes), für das Magnetfeld (Induktionsgleichung) und das Temperaturfeld (Energiegleichung) gelöst. Diese Gleichungen werden im Ruhesystem des Mantels gelöst, dadurch tritt die Coriolis-Kraft als Scheinkraft auf und das äußere Magnetfeld wird damit im natürlichen Referenzsystem der Kruste angegeben.

Folgendes entdimensionalisiertes, magnetohydrodynamisches Gleichungssystem wird numerisch in Zeitschritten integriert:

$$\mathbf{E} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \mathbf{E} \Delta \mathbf{v} - \nabla \Pi - 2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} + \frac{1}{\mathbf{P}_m} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \text{Ra} T \mathbf{e}_r \quad (7.1)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mathbf{P}_m} \Delta \mathbf{B} \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T + \epsilon \quad (7.3)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (7.4)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad (7.5)$$

Tabelle 7.1: Die 4 dimensionslosen Kontrollparameter mit ihren Definitionen und das Skalenverhältnis für die 3D Dynamosimulationen. Werte aus Christensen und Wicht (2007).

Kontrollparameter	Definition	Modellwert	Terrestrischer Wert
Ekman-Zahl	$E = \frac{\nu}{\Omega D^2}$	$10^{-3} \dots 10^{-6}$	$10^{-15} \dots 10^{-14}$
Prandtl-Zahl	$P = \frac{\nu}{\kappa}$	1	$0,1 \dots 1$
magnetische Prandtl-Zahl	$P_m = \frac{\nu}{\eta}$	1	$10^{-6} \dots 10^{-5}$
modifizierte Rayleigh-Zahl	$Ra = \frac{\alpha g_0 \delta T D}{\nu \Omega}$	$1 \dots 50$	$\gg 1$
Skalenverhältnis	$\chi = \frac{R_{ICB}}{R_{CMB}}$	0,35	0,35

In den Gleichungen (7.1)-(7.3) treten 4 dimensionslose Kontrollparameter auf (s. Tabelle 7.1), die die Flüssigkeit charakterisieren und ein weiterer, der die Mächtigkeit der Kugelschale angibt. Die Rayleigh-Zahl Ra ist proportional zum superadiabatischen Temperaturunterschied zwischen innerem Kern und Kern-Mantel-Grenze. Sie ist somit ein Maß für die Stärke der Konvektion im Kern. Die Ekman-Zahl beschreibt das Verhältnis von viskosen Kräften zur Corioliskraft. Die magnetische Prandtl-Zahl ist das Verhältnis von viskoser und magnetischer Diffusivitätskonstante. Die Prandtl-Zahl steht für das Verhältnis von viskoser zu thermischer Diffusivitätskonstante. Wie in Tabelle 7.1 dargestellt, sind die numerischen Dynamomodelle in zwei von ihren Kontrollparametern um einige Größenordnungen von der Realität entfernt. Dies ist durch die begrenzten numerischen Ressourcen begründet. Trotz dieses Nachteils gelingt es in den Simulationen die Konvektion einigermaßen realistisch darzustellen. Die lokale Rossby-Zahl und die magnetische Reynoldszahl (s. Kapitel 5.1 und 5.7) in den Simulationen entspricht in etwa den Erwartungen für planetare Dynamos. Die in den Gleichungen auftretenden physikalischen Größen, ihre Symbole und die eventuellen Entdimensionalisierungen werden in Tabelle 7.2 zusammengefasst. Ein Stern als Index bezeichnet eine dimensionsbehaftete Größe, die entdimensionalisiert wird. Die Gleichungen für die Inkompressibilität der Strömung (7.4) und die magnetische Quellenfreiheit (7.5) werden implizit erfüllt, da für beide Felder eine Mie-Zerlegung (in toroidale und poloidale Anteile) angesetzt wird. Die linearen Terme werden auf einem *spektralen* Gitter berechnet. Im Gegensatz dazu, werden die nicht-linearen auf dem *lokalen* Gitter ermittelt, da diese mehrere spektrale Moden verkoppeln können. Die linearen Terme werden auf das lokale Gitter per inverser Fouriertransformation in radialer und azimuthaler Richtung und mittels einer sphärisch-harmonischen Synthese (manchmal auch Legendre-Transformation genannt, was aber zu Verwechslungen führt) in polarer Richtung umgeformt. Daher die Namensgebung *pseudo-spektral*.

Zur Einkopplung des externen Magnetfeldes wird die magnetische Randbedingung an der Kern-Mantel-Grenze modifiziert. Normalerweise wird lediglich gefordert, dass das

Tabelle 7.2: Physikalische Größen in der Dynamosimulation und die Entdimensionalisierungsvorschriften.

Physikalische Größe	Symbol	Entdimensionalisierung
interne Heizrate (z.B. Radioaktivität)	ϵ	
kinematische Viskosität	ν	
Schalendicke	$D = R_{\text{CMB}} - R_{\text{ICB}}$	
Rotationsgeschwindigkeit	Ω	
thermischer Expansionskoeffizient	α	
super-adiabatischer Temperaturunterschied	δT	
thermale Diffusivität	κ	
magnetische Diffusivität	η	
Massendichte	ρ_m	
Länge	L	$L = \frac{L^*}{D}$
Zeit	t	$t = \frac{\nu t^*}{D^2}$
Geschwindigkeit	\mathbf{v}	$\mathbf{v} = \frac{D \mathbf{v}^*}{\nu}$
Magnetfeld	B	$B = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_m \Omega}} B^*$
Gravitationsbeschleunigung	g	$g = \frac{g^*}{g_{\text{CMB}}}$
Temperatur	T	$T = \frac{T^*}{\delta T}$
nichthydrostatischer Druck	Π	$\Pi = \frac{\Pi^*}{\rho_m \nu \Omega}$
magnetische Permeabilität	μ	$\mu = \frac{\mu^*}{\mu_0}$

äußere Magnetfeld nur einem internen Potentialfeld entspricht - dies muss dann um das externe Feld erweitert werden.

Für das Magnetfeld wird eine Zerlegung nach poloidalen und toroidalen Feldern gewählt:

$$\underline{B} = \underline{B}_{\text{tor}} + \underline{B}_{\text{pol}} = \underline{\nabla} \times (\underline{A}_{\text{pol}} + \underline{A}_{\text{tor}}) = \underline{\nabla} \times \underline{e}_r \mathcal{T}_B + \underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{e}_r \mathcal{P}_B \quad . \quad (7.6)$$

Hierbei bezeichnen \mathcal{T}_B und \mathcal{P}_B das toroidale bzw. das poloidale magnetische Vektorpotential. Für die Einkopplung des externen Feldes ist die zeitliche Entwicklung des poloidalen Magnetfeldes besonders wichtig und wird daher hier dargestellt. Die zeitliche Entwicklung des Geschwindigkeitsfeldes erfolgt analog. Die Potentiale werden in horizontaler Richtung (θ, φ) nach komplexwertigen Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ und in radialer Richtung nach Tschebyschoff-Polynomen $C_n(r)$ entwickelt:

$$\mathcal{P}_B(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=1}^L \sum_{m=-l}^{+l} \mathcal{P}_{Blm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{l=1}^L \sum_{m=-l}^{+l} \sum_{n=0}^N \mathcal{P}_{Blmn} C_n(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (7.7)$$

$$\text{mit } C_n(r) = \cos(n \arccos r) \quad . \quad (7.8)$$

Aus der Definition des poloidalen Magnetfeldes ergibt sich die für Spektraltransformationen wichtige Beziehung (z.B. Wolf-Gladrow et al. 1987)

$$\underline{e}_r \underline{B} = -\Delta_H \mathcal{P}_B \quad . \quad (7.9)$$

Dabei ist

$$\Delta_H = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \quad (7.10)$$

der horizontale Anteil des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten (z.B. Bronstein et al. 2001). Dieser wirkt bekanntlich auf die Kugelflächenfunktionen nach der Vorschrift:

$$\Delta_H Y_{lm} = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm} \quad . \quad (7.11)$$

Die Kugelflächenfunktionen sind demnach Eigenfunktionen des horizontalen Laplace-Operators in Kugelkoordinaten und vereinfachen daher immens die Berechnung der Diffusionsterme.

Zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung des Magnetfeldes wird die Induktionsgleichung im Spektralraum dargestellt. Dazu werden Größen auf dem lokalen Gitter durch Integration unter der Ausnutzung der Orthogonalitätsrelation

$$\int_{\Omega(r)} Y_{lm} Y_{l'm'}^* d\Omega = \delta_{l'l} \delta_{m'm} \quad (7.12)$$

in den Spektralraum überführt. Zur Abspaltung des poloidalen Magnetfeldanteils wird die Induktionsgleichung mit $Y_{lm}^* \underline{e}_r$ multipliziert und über die Sphäre Ω integriert:

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\Omega(r)} Y_{lm}^* \underline{e}_r \underline{B} d\Omega &= \int_{\Omega(r)} Y_{lm}^* \underline{e}_r \underline{\nabla} \times (\underline{v} \times \underline{B}) d\Omega + \frac{1}{P_m} \int_{\Omega(r)} Y_{lm}^* \underline{e}_r \Delta \underline{B} d\Omega \\ \Leftrightarrow \frac{l(l+1)}{r^2} \partial_t \mathcal{P}_{Blm}(r) &= \int_{\Omega(r)} Y_{lm}^* \underline{e}_r \cdot \underline{D} d\Omega + \frac{1}{P_m} \frac{l(l+1)}{r^2} \left[\partial_r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \mathcal{P}_{Blm}(r) \end{aligned} \quad (7.13)$$

wobei $\underline{D} = \underline{\nabla} \times (\underline{v} \times \underline{B})$ gilt. Die radialen Ableitungen wirken nur auf die Tschebyschoff-Polynome in der Entwicklung von g :

$$\partial_r \mathcal{P}_B = \sum_{n=0}^N \mathcal{P}_{Blmn} \partial_r C_n(r) \quad . \quad (7.14)$$

Daher ergibt sich die zu lösende Differentialgleichung für die Koeffizienten \mathcal{P}_{Blmn} :

$$\frac{l(l+1)}{r^2} \sum_n \left[\left(\partial_t + \frac{1}{P_m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right) C_n(r) - \frac{1}{P_m} \partial_r^2 C_n(r) \right] \mathcal{P}_{Blmn} = \int_{\Omega(r)} Y_{lm}^* \underline{e}_r \cdot \underline{D} d\Omega \quad (7.15)$$

Für einen Zeitschritt muss die rechte Seite mit dem nichtlinearen Dynamo-Term D und der Diffusionsanteil bekannt sein. Das Integrationsgebiet wird in Kugelschalen mit Index k aufgeteilt ($C_{nk} = C_n(r_k)$). Dies verändert die zeitliche Entwicklungsgleichung für die magnetische, poloidale Potentialfunktion

$$\frac{l(l+1)}{r_k^2} C_{nk} \partial_t \mathcal{P}_{Blmn}(t) + \frac{1}{P_m} \left(\frac{l(l+1)}{r_k^2} \right)^2 C_{nk} \mathcal{P}_{Blmn}(t) - \frac{1}{P_m} \frac{l(l+1)}{r_k^2} \partial_r^2 C_{nk} \mathcal{P}_{Blmn}(t) = \int_{\Omega_k} Y_{lm}^* \underline{e}_r \cdot \underline{D} d\Omega \quad (7.16)$$

In dieser Gleichung und von hier ab in diesem Kapitel gilt die Konvention, dass über den Index n implizit summiert wird, wenn er doppelt in einem Term auftaucht. Die \mathcal{P}_B -Koeffizienten beinhalten die zeitliche Entwicklung und deren zeitliche Ableitung wird mit der Vorwärtsdifferenz realisiert:

$$\partial_t \mathcal{P}_{Blmn} = \frac{\mathcal{P}_{Blmn}(t + \delta t) - \mathcal{P}_{Blmn}(t)}{\delta t} \quad (7.17)$$

Für eine bessere Übersicht werden drei Matrizen definiert:

$$A_{kn} := \frac{l(l+1)}{r_k^2 \delta t} C_{nk} \quad (7.18)$$

$$G_{kn} := \frac{1}{P_m} \frac{l(l+1)}{r_k^2} \left(\frac{l(l+1)}{r_k^2} C_{nk} - \partial_r^2 C_{nk} \right) \quad (7.19)$$

$$D_{klm} := \int_{\Omega_k} Y_{lm}^* \underline{e}_r \cdot \underline{D} d\Omega \quad (7.20)$$

Dadurch vereinfacht sich die Entwicklungsgleichung

$$A_{kn} \mathcal{P}_{Blmn}(t + \delta t) - A_{kn} \mathcal{P}_{Blmn}(t) + G_{kn} \mathcal{P}_{Blmn}(t) = D_{klm}(t) \quad (7.21)$$

Die Matrix \underline{A} ist nur abhängig von der Ordnung l aber nicht vom Grad m . Auf Grund der Abhängigkeit von δt muss die Matrix \underline{A} bei jeder Änderung des Zeitschritts angepasst werden. Die Matrix \underline{G} enthält die Berechnung der Diffusion und ist ebenfalls nur abhängig von der Ordnung l aber nicht vom Grad m . Die Matrix \underline{G} hingegen kann für alle Zeitschrittgrößen zunächst konstant gehalten werden. Über die Matrix \underline{D} , die die Wirkung des Strömungsfeldes auf das Magnetfeld beschreibt, kann eine Modenkopplung des poloidalen und toroidalen Feldes sowie verschiedener (l, m) Moden stattfinden. Dies ist numerisch effizient, verhindert aber eine direkte Nachverfolgung der Wechselwirkung einzelner spektraler Strömungsmoden mit Magnetfeldmoden, wie es z.B. Bullard und Gellman (1954) studiert hatten.

Für den diffusiven Term wird ein modifiziertes Crank-Nicholson-Verfahren (z.B. Press et al. 1992) benutzt, dass implizit und gewichtet den nächsten Zeitschritt berücksichtigt. Damit wird die numerische Implementierung für größere Zeitschritte stabiler

$$G_{kn}\mathcal{P}_{Blmn}(t) \rightarrow G_{kn}(\alpha\mathcal{P}_{Blmn}(t + \delta t) + (1 - \alpha)\mathcal{P}_{Blmn}(t)) \quad (7.22)$$

Für das klassische Verfahren wäre $\alpha = 0,5$. Nach Glatzmaier (1984) wird aber $\alpha = 0,6$ gewählt, um die numerische Integration zu stabilisieren. Die Matrix mit dem Dynamoterm wird nach der expliziten Adams-Bashforth-Methode (z.B. Press et al. 1992) umgewandelt, so dass der Dynamoterm vom letzten Zeitschritt noch einen gewichteten Einfluss besitzt:

$$D_{klm}(t) \rightarrow \frac{3}{2}D_{klm}(t) - \frac{1}{2}D_{klm}(t - \delta t) \quad (7.23)$$

Dadurch wird die Gl. 7.21

$$\begin{aligned} A_{kn}\mathcal{P}_{Blmn}(t + \delta t) &= A_{kn}g_{lmn}(t) + G_{kn}(\alpha\mathcal{P}_{Blmn}(t + \delta t) + (1 - \alpha)\mathcal{P}_{Blmn}(t)) \\ &= \frac{3}{2}D_{klm}(t) - \frac{1}{2}D_{klm}(t - \delta t) \end{aligned} \quad (7.24)$$

und sortiert nach Zeitschritten

$$\begin{aligned} (A_{kn} + \alpha G_{kn}) \mathcal{P}_{Blmn}(t + \delta t) \\ = (A_{kn} - (1 - \alpha)G_{kn})\mathcal{P}_{Blmn}(t) + \frac{3}{2}D_{klm}(t) - \frac{1}{2}D_{klm}(t - \delta t) \end{aligned} \quad (7.25)$$

Für einen Zeitschritt muss also die rechte Seite berechnet und die Matrix $(A_{kn} + \alpha G_{kn})$ invertiert werden. Dies gilt jedoch nur für den Innenraum der Dynamozone. An den Rändern (an der Grenze zum inneren Kern und an der Kern-Mantel-Grenze) ersetzen die Randbedingungen die Evolutionsgleichungen.

Bei den Dynamosimulationen, deren Ergebnisse im nächsten Kapitel dargestellt sind, wurde zunächst die rein konvektive Lösung, also ohne Magnetfeld bestimmt. Das System wird durch kleine Temperaturstörungen instabil und zum Konvektieren gebracht. Wenn sich die kinetische Gesamtenergie nicht mehr wesentlich ändert, wird diese Simulation als stationär betrachtet. Danach wurde das kinetische Spektrum überprüft. Allgemein werden Simulationen als korrekt aufgelöst betrachtet, bei denen die spektrale Amplitude über mindestens 2 Größenordnungen von den ersten Moden abfällt. Das Saatmagnetfeld wurde mit zwei magnetischen Moden (eine poloidale Mode mit $l = 1, m = 0$ und eine toroidale Mode $l = 2, m = 0$, mit einer resultierenden Stromdichte, die unabhängig ist vom Radius) überall im äußeren Kern mit der konvektiven Startlösung als Grundlage vorgegeben und die Simulation damit neu gestartet. Der Vorteil der konvektiven Startlösung ist, dass das magnetische Saatfeld sehr schnell umgewandelt wird. Die Auflösung des räumlichen Gitters betrug 60 radiale Kugelschalen für den äußeren Kern, 17 für den inneren und 288 Winkelschritte im Azimuth (entspricht 144 Schritten im Meridian). Es wurden keine Hyperdiffusivitäten benutzt und keine explizite Periodizität im Azimuth gefordert. Die Leitfähigkeit des inneren Kerns entspricht der des äußeren Kerns und es war erlaubt, dass sich die Rotationsgeschwindigkeit auf Grund von viskosen Drehmomenten oder Drehmomenten basierend auf der Lorentzkraft ändert. Der Mantel wurde als Isolator angesehen.

7.2 Randbedingungen an der Kern-Mantel-Grenze

Über die Kern-Mantel-Grenze findet in vielen geophysikalischen Größen ein Übergang statt. Dieser Grenzübergang muss thermisch, mechanisch und magnetisch im numerischen Modell berücksichtigt werden.

7.2.1 Thermische Randbedingungen

Es werden allgemein zwei Möglichkeiten für die thermischen Randbedingungen verwendet. Entweder ist es möglich, eine konstante Temperatur oder einen konstanten thermischen Fluss an der Kern-Mantel-Grenze vorzugeben. In dieser Arbeit wird die Temperatur konstant gehalten aber in Zukunft sollte überprüft werden, wie Dynamos mit einem konstanten Wärmefluss auf den magnetosphärischen Feedback reagieren, da diese Randbedingung allgemein realistischer erscheint. Die typische Konvektionsgeschwindigkeit im Erdkern und -mantel unterscheiden sich um 6 Größenordnungen (10^{-4} m/s und 10^{-10} m/s nach Sakuraba und Roberts (2009)). Der wesentlich trägere Mantel reguliert also den Wärmefluss aus dem Planeten und örtlich begrenzte Konvektionszellen im Mantel rufen Inhomogenitäten im Wärmefluss und damit auch in der lateralen Temperaturverteilung an der Kern-Mantel-Grenze hervor. Dies verändert die Struktur der Konvektion im Kern deutlich - so werden generell bei der Modellierung mit einer lateral konstanten Randtemperatur konvektive Strömungen von planetarer Skala unterdrückt im Gegensatz zur Modellierung mit konstantem thermischen Fluss. Sakuraba und Roberts (2009) stellen die Auswirkungen beider Randbedingungen gegenüber und stellen fest, dass die von ihnen studierten Dynamos mit konstantem Wärmefluss und einhergehender großskaligen Konvektionsstrukturen vergleichsmäßig starke Magnetfelder mit Dipoldominanz erzeugen. Es stellt sich natürlich die Frage, ob sich bei einem so dünnen Mantel wie er wahrscheinlich bei Merkur vorliegt, sich nicht viele kleine Konvektionszellen im Mantelausbilden, die im Mittel eine, auf Zeitskalen des flüssigen Merkurkerns, zeitlich konstante und lateral nur auf kleinen skalen variierende Randtemperatur hervorrufen. Dann wäre die hier verwendete thermische Randbedingung auch realistisch.

7.2.2 Mechanische Randbedingungen

In dieser Arbeit wird nur ein vollständig ausdifferenzierter Planet mit festem inneren und flüssigem äußeren Kern modelliert. Die Kern-Mantel-Grenze stellt für das, gegenüber den Mantelsilikaten deutlich dichteren Kernmaterial (De Pater und Lissauer 2010), eine undurchdringliche Barriere dar. Daher muss in den Modellierungen für die normale Geschwindigkeitskomponente v_{\perp} stets

$$v_{\perp} \Big|_{\text{CMB}} = 0 \quad . \quad (7.26)$$

gelten. Für die Kernflüssigkeit stellt die Unterseite des Mantels eine starre Wand dar, an der auch die laterale Geschwindigkeit v_{\parallel} verschwinden muss. Zusammen mit dem gerade genannten verschwindenden radialen Strömung ergibt sich zusammen die sog. *no-slip* Bedingung. Im Kern kommt es zu einer Ausbildung einer Ekman-Schicht der Dicke $O(\sqrt{\nu/\Omega} \propto \sqrt{E})$. Die dynamische Bedeutung dieser Schicht wird z.B. in Jones (2007)

diskutiert. Wegen der geringen Viskosität ν und der für einen terrestrischen Dynamo schnellen planetaren Rotation Ω ist diese Grenzschicht sehr dünn und damit dynamisch bedeutend. In den gängigen Dynamosimulationen kann eine realistische Ekman-Zahl wegen den begrenzten Rechenkapazitäten nicht realisiert werden und damit bildet sich in den Simulationen für die gewählte (zu hohe) Ekman-Zahl eine zu dicke Grenzschicht aus. Manche Autoren wie z.B. Kuang und Bloxham (1997) unterdrücken die Ausbildung dieser Grenzschicht, in dem sie eine *free-slip* Bedingung implementieren. In dieser Arbeit wurde lediglich die *no-slip* Bedingung verwendet und es bleibt in Zukunft zu testen, ob eine Änderung der mechanischen Randbedingung sich auf die Beeinflussbarkeit eines Dynamos durch ein magnetosphärisches Feld auswirkt.

Im allgemeinen werden planetare Dynamos in ausdifferenzierten Körpern betrachtet. Es ist aber nicht von vornherein auszuschließen, dass ein Dynamoprozess schon während der Differentiationsphase startet. Besonders wenn der Feedbackdynamo zu einer Frühzeit des Sonnensystems betrachtet wird (s. Kapitel 8.2), kann dies mit der Differentiationsphase zusammenfallen.

7.2.3 Übergangsbedingung des Magnetfeldes

Das äußere Magnetfeld wird numerisch über eine Randbedingung an der Kern-Mantel-Grenze in die Dynamoregion eingekoppelt. Das externe Magnetfeld wird über magnetische Diffusion in den Kern hineintransportiert, da die Strömung und damit die Magnetfeldadvektion an der Kern-Mantel-Grenze durch die *no-slip* Bedingung unterdrückt wird (in Bezug auf das Ruhesystem des Mantels). Erst tiefer im flüssigen Kern spielt auch der Transport und Verformung durch die Strömung von leitfähigem Material eine Rolle.

Auf Grund der Quellenfreiheit des Magnetfeldes $\nabla \cdot \underline{B} = 0$ ergibt sich in jedem Fall für den Sprung der radialen Magnetfeldkomponente über den Kugelrand

$$[B_r] = 0 \quad . \quad (7.27)$$

Die Notation [...] steht hier für die Differenz einer Größe über eine Grenzfläche hinweg. Aus $\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j}$ folgt im Grenzfall

$$[B_{||}] = \mu_0 i \quad (7.28)$$

mit der Schichtstromdichte i . Wenn der Schichtstrom verschwindet und damit $[B_{||}] = 0$ ist, folgt mit der Quellenfreiheit vom Magnetfeld $\nabla \cdot \underline{B} = \partial_r B_r + \partial_{||} B_{||} = 0$

$$[\partial_r B_r] = 0 \quad . \quad (7.29)$$

In Abwesenheit einer Strömung ergibt sich aus der Induktionsgleichung für eine homogene, isotrope Leitfähigkeit

$$\partial_t \underline{B} = \eta \Delta \underline{B} \quad (7.30)$$

$$\Rightarrow \partial_t \underline{j} = \eta \Delta \underline{j} \quad (7.31)$$

wobei auch $\nabla \cdot \underline{j} = 0$ angenommen wurde. Die charakteristische Diffusionszeit ist hier $\tau = L^2/\eta = \mu_0 \sigma L^2$. Hierbei ist zu beachten, dass für die charakteristische Länge L hier

die Breite des Schichtstroms, also eine verschwindend kleine Größe, zu verwenden ist. Damit ergibt sich, dass ein Schichtstrom quasi-instantan zu einer Stromverteilung mit endlicher Breite diffundiert. Wenn die Leitfähigkeit nicht homogen und isotrop ist (wie strenggenommen an der Kern-Mantel-Grenze), muss statt Gleichung (7.31) ein wesentlich längerer Ausdruck betrachtet werden. Es wird aber hier angenommen, dass τ die dominierende Zeitskala für die Stromdiffusion ist, und damit die reinen Schichtströme schnell zu einer endlichen Ausdehnung gelangen.

Da die Leitfähigkeit des Mantels im Vergleich zum Kernmaterial um Größenordnungen geringer ist, kann man den Mantel als Nichtleiter modellieren. Daraus folgt auch, dass außerhalb des Kerns keine toroidalen Felder existieren können - das toroidale Magnetfeld muss also an der Kern-Mantel-Grenze verschwinden. Realistischerweise ist die Leitfähigkeit im unteren Mantel nicht genau Null sondern lediglich rund zwei Größenordnungen geringer als im Kern (für eine Übersicht über die Modelle für die Erde: siehe Stadelmann (2012)). In dieser Arbeit wurde jedoch der Einfachheit halber der Mantel als Isolator betrachtet. Es bleibt in Zukunft zu prüfen, ob die endliche Leitfähigkeit der unteren Mantelschichten einen Einfluss auf den Feedbackdynamo haben. Damit ist nicht auf die induzierten Ströme an der Kern-Mantel-Grenze auf Grund von Schwankungen im externen Feld der Magnetosphäre abgezielt, die durch eine Variation im Sonnenwinddruck hervorgerufen werden (Grosser et al. 2004). Diese Ströme besitzen gerade in der relativ kleinen Merkmagnetosphäre einen Einfluss auf die Magnetosphäre über das effektive interne Dipolmoment des Planeten und damit auf die magnetosphärische Antwortfunktion, der aber in dieser Arbeit nicht systematisch untersucht wird.

Die Ergebnisse aus den Betrachtungen zur Stetigkeit der Magnetfeldkomponenten erlauben es nun, den Gradienten des poloidalen Magnetfeldes so vorzugeben, dass es im Außenraum des Dynamos bis zu den magnetosphärischen Strömen durch ein skalares Potential (stromfreies Gebiet) beschrieben werden kann. Der interne Anteil rührt vom Dynamoprozess selber her während der externe von den magnetosphärischen Strömen generiert wird. Es gilt nun, die unterschiedlichen Darstellungen des Magnetfeldes (*Innenraum*: komplexes Vektorpotential, vollständig Normiert; *Außenraum*: reelles skalares Potential, quasi-normiert) zu vergleichen, damit das externe Feld in den Dynamosimulationen korrekt vorgegeben werden kann.

Das auf den Dynamo einwirkende externe Feld ist im wesentlichen achsensymmetrisch. Daher beschränken sich die folgenden Betrachtungen auf den Fall $m = 0$. Die Radialkomponente des Magnetfeldes an der Kern-Mantel-Grenze einer bestimmten achsensymmetrischen Mode $(l,0)$ lässt sich aus der poloidalen Vektorpotentialfunktion \mathcal{P}_B durch

$$\begin{aligned} (\underline{e}_r \cdot \underline{B}_{\text{dyn}})_{m=0} &= \sum_l B_{l,r,\text{dyn}}^0(R_{\text{CMB}}) \\ &= -\Re \left\{ \sum_l \Delta_H \mathcal{P}_{B_l}^0(R_{\text{CMB}}) Y_l^0 \right\} \\ &= \sum_l \Re \{ \mathcal{P}_{B_l}^0(R_{\text{CMB}}) \} \frac{l(l+1)}{R_{\text{CMB}}^2} Y_l^0 \end{aligned} \quad (7.32)$$

bestimmen. Dabei wurde ausgenutzt, dass $\Im\{Y_l^0\} = 0$ ist. Aus dieser Gleichung ergibt sich

die radiale Ableitung des Feldes einer achsensymmetrischen Mode zu

$$\begin{aligned} \partial_r B_{l,r,\text{dyn}}^0(R_{\text{CMB}}) &= \frac{l(l+1)}{R_{\text{CMB}}^2} \Re \left\{ \left(\mathcal{P}_{B_l}^{0'}(R_{\text{CMB}}) - \frac{2}{R_{\text{CMB}}} \mathcal{P}_{B_l}^0(R_{\text{CMB}}) \right) Y_l^0 \right\} \\ m=0 \quad : \quad &= \frac{l(l+1)}{R_{\text{CMB}}^2} \Re \left\{ \mathcal{P}_{B_l}^{0'}(R_{\text{CMB}}) - \frac{2}{R_{\text{CMB}}} \mathcal{P}_{B_l}^0(R_{\text{CMB}}) \right\} Y_l^0 \quad (7.33) \end{aligned}$$

Nun gilt es, dieses Magnetfeld und die radiale Ableitung mit dem Außenfeld zu vergleichen. Das Magnetfeld außerhalb der Kern-Mantel-Grenze setzt sich zusammen aus einem inneren Anteil, der vom Dynamo selbst herrührt und einem externem von der Magnetosphäre. Beide Magnetfelder sind durch den Gradienten eines skalaren, reellwertigen Potentials Ψ (hier zunächst mit vollständiger Normierung der Kugelflächenfunktionen) darstellbar:

$$\Psi = R_M \Re \left\{ \sum_{l,m} \left[g_{l,\text{int},c}^m \left(\frac{R_M}{r} \right)^{l+1} + g_{l,\text{ext},c}^m \left(\frac{r}{R_M} \right)^l \right] Y_l^m \right\} \quad (7.34)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow B_{l,r,\text{mantel}}^0(R_{\text{CMB}}) &= -\partial_r \Psi_l^0(R_{\text{CMB}}) \\ &= \Re \left\{ g_{l,\text{int},c}^0 (l+1) \left(\frac{R_M}{R_{\text{CMB}}} \right)^{l+2} - g_{l,\text{ext},c}^0 l \left(\frac{R_{\text{CMB}}}{R_M} \right)^{l-1} \right\} Y_l^0 \quad (7.35) \end{aligned}$$

Der Index c deutet an, dass die hier verwendeten Koeffizienten komplexwertig sind. Die radiale Ableitung des radialen Magnetfeldes im Außenraum (Mantel) ist dann

$$\partial_r B_{l,r,\text{mantle}}^0(R_{\text{CMB}}) = -\frac{1}{R_M} \Re \left\{ g_{l,\text{int},c}^0 (l+1)(l+2) \left(\frac{R_M}{R_{\text{CMB}}} \right)^{l+3} + g_{l,\text{ext},c}^0 l(l-1) \left(\frac{R_{\text{CMB}}}{R_M} \right)^{l-2} \right\} Y_l^0 \quad (7.36)$$

Setzt man nun die Stetigkeit der Komponente sowie deren radiale Ableitung voraus, ergibt sich

$$\begin{aligned} \Re \left\{ \mathcal{P}_{B_l}^0(R_{\text{CMB}}) \right\} \frac{l(l+1)}{R_{\text{CMB}}^2} &= \Re \left\{ g_{l,\text{int},c}^0 (l+1) \left(\frac{R_M}{R_{\text{CMB}}} \right)^{l+2} - g_{l,\text{ext},c}^0 l \left(\frac{R_{\text{CMB}}}{R_M} \right)^{l-1} \right\} \\ \frac{l(l+1)}{R_{\text{CMB}}^2} \Re \left\{ \mathcal{P}_{B_l}^{0'}(R_{\text{CMB}}) - \frac{2}{R_{\text{CMB}}} \mathcal{P}_{B_l}^0(R_{\text{CMB}}) \right\} &= -\frac{1}{R_M} \Re \left\{ g_{l,\text{int},c}^0 (l+1)(l+2) \left(\frac{R_M}{R_{\text{CMB}}} \right)^{l+3} + \right. \\ &\quad \left. + g_{l,\text{ext},c}^0 l(l-1) \left(\frac{R_{\text{CMB}}}{R_M} \right)^{l-2} \right\} \\ \Re \left\{ \mathcal{P}_{B_l}^{0'}(R_{\text{CMB}}) + \frac{l}{R_{\text{CMB}}} \mathcal{P}_{B_l}^0(R_{\text{CMB}}) \right\} &= -\frac{2l+1}{l+1} \frac{R_{\text{CMB}}^l}{R_M^{l-1}} \Re \left\{ g_{l,\text{ext},c}^0 \right\} \\ l=1 : \quad \Re \left\{ \mathcal{P}_{B_1}^{0'}(R_{\text{CMB}}) + \frac{1}{R_{\text{CMB}}} \mathcal{P}_{B_1}^0(R_{\text{CMB}}) \right\} &= -\frac{3}{2} R_{\text{CMB}} \Re \left\{ g_{1,\text{ext},c}^0 \right\} =: \text{rhs1} \quad (7.37) \end{aligned}$$

Die Gleichung (7.37) wird an Stelle der Matrixgleichung (7.25) gelöst. Die rechte Seite der Gleichung (7.37) hat im MAGIC-Simulationsprogramm die Bezeichnung *rhs1* und

die Einheit *Tesla · Meter*. Im Code wird die nichtdimensionale Form $rhs1^*$ benutzt. Also muss sie durch

$$rhs1^* = \frac{rhs1}{D \sqrt{\mu_0 \rho_m \eta \Omega}} \quad (7.38)$$

normiert werden. Ohne externes Feld wäre natürlich die rechte Seite gleich Null wie in Christensen und Wicht (2007) beschrieben. Die Antwortfunktionen, die sich aus verschiedenen Modellierungsansätzen ergeben, sind für einen internen Gauss-Koeffizienten in einer Kugelfunktionsentwicklung nach dem Standard des *International Geomagnetic Reference Field*¹ formuliert und wie sie in Gleichung (2.7) enthalten sind. Die im Simulationsprogramm verwendeten Entwicklungen sind komplexwertig und die Kugelfunktionen anders normiert. Daher müssen diese unterschiedlichen Formulierungen miteinander verglichen werden. Dies resultiert lediglich in Anpassungskoeffizienten aber ist wichtig, da das externe Feld nicht so stark werden darf, dass ein Übergang von einem Dynamo hin zu einem Magnetokonvektionsprozess stattfindet, bei dem sich der Dynamo aus dem externen Feld speist.

Mit dem 3D-Simulationsprogramm wurden zwei wichtige Fälle von magnetosphärischen Antwortfunktionen getestet. Diese entsprechen qualitativ den durch die magnetosphärisch modellierten/simulierten Funktionen unterscheiden sich aber quantitativ. Diese Anpassung wurde vorgenommen, damit die Antwortfunktion erstens überall glatt ist, was numerische Instabilitäten vermeidet, und zweitens nur von zwei Kontrollparametern abhängt, was die Planung, die Durchführung, die Bewertung der Simulationen und die Darstellung der Ergebnisse erheblich vereinfacht.

Daher werden für die 3D-Dynamosimulationen die folgende Form für die Antwortfunktion benutzt

$$g_{1,ext}^0 = c_1 \operatorname{sign}(g_{1,int}^0) \frac{|g_{1,int}^0|^5}{c_2^5 + |g_{1,int}^0|^5} \quad (7.39)$$

Hierbei sind c_1 und c_2 zwei Kontrollparameter, mit denen die Antwortfunktion angepasst werden kann. Für $g_{1,int} \rightarrow \infty$ tendiert diese Funktion gegen c_1 und ähnelt damit der Funktion, die aus der kugelförmigen Magnetopause ermittelt wurde. Hingegen für $g_{1,int} \rightarrow 0$ verschwindet das externe Feld und trägt damit der sub-kutanen Magnetopause Rechnung. Bei der relativen Antwortfunktion, die nach der kinematischen Studie ausschlaggebend für die Entwicklung des Dynamos ist, ergibt sich ein Maximum bei $g_{int,1}^0 = \pm 1,32 \cdot c_2$. Die Höhe dieses Maximums ist durch $0,61 c_1 / c_2$ definiert.

7.2.4 Approximativer Größenvergleich der Internen und Externen Felder

Nach der Modellierung mit der Kugelmagnetosphäre 3.4 ist das externe Feld für einen mittleren Sonnenwinddruck von derzeit 13,4 nPa gerade $g_{1,ext}^0 = 115$ nT. Wie verhält sich dieser Wert zum internen Dipolfeld an der Kern-Mantel-Grenze in sowohl den gängigen Dynamosimulationen und in Realität?

Viele Standarddynamosimulationen liegen im magnetostrophischen Regime (s. Kapitel 5.5), also gilt im Kern ungefähr $\Lambda \approx 1$. Das charakteristische Magnetfeld im Dynamo

¹<http://www.ngdc.noaa.gov/IGAG/vmod/igrf.html>

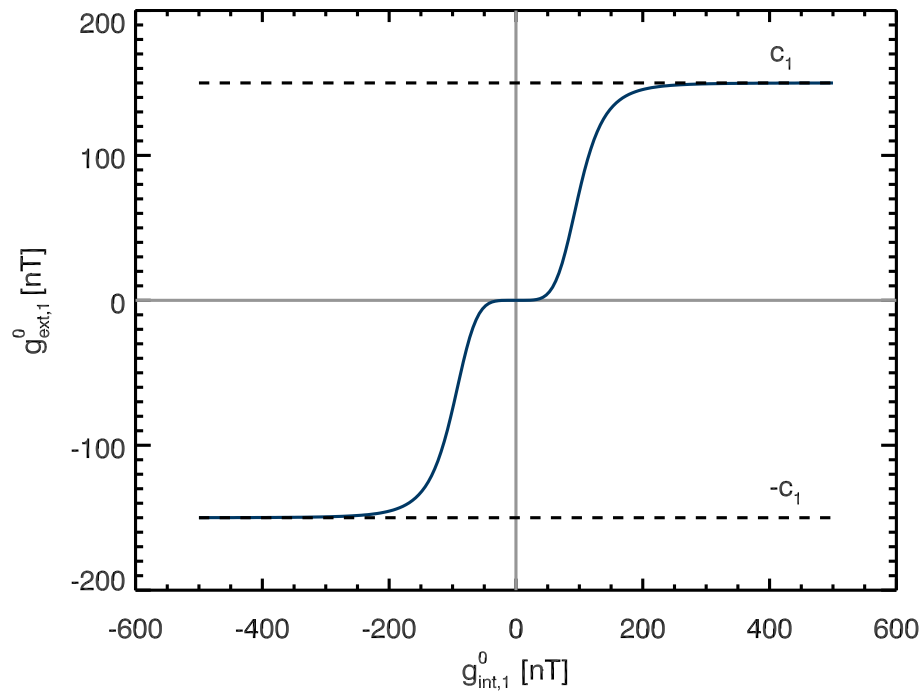


Abbildung 7.2: Antwortfunktion für die 3D Dynamosimulationen. Hier dargestellt für angenommene Werte $c_1 = 150$ nT und $c_2 = 100$ nT.

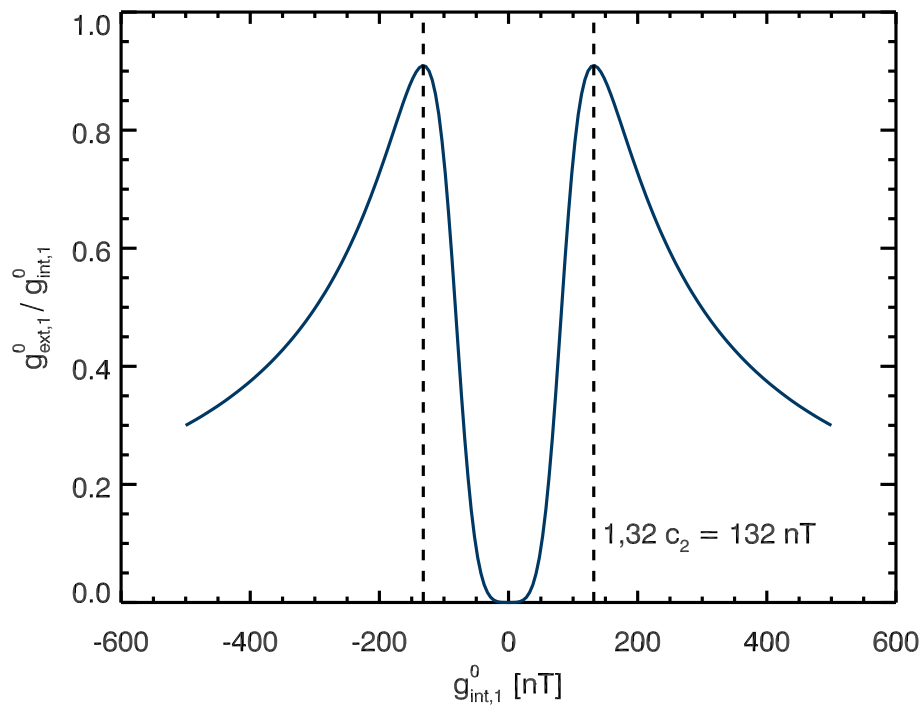


Abbildung 7.3: Relative Antwortfunktion für die 3D Dynamosimulationen. Hier dargestellt für angenommene Werte $c_1 = 150$ nT und $c_2 = 100$ nT.

Tabelle 7.3: Physikalische Größen zur Entdimensionalisierung des Magnetfeldes nach Wicht et al. (2007). Die Massendichte entspricht einem in erster Näherung angenommenen Schwefelgehalt von 5 %.

Physikalische Größe	Symbol	Wert
el. Leitfähigkeit	σ	$6 \times 10^5 \text{ S/m}$
Massendichte	ρ_m	$\approx 8300 \text{ kg m}^{-3}$
Rotationsgeschwindigkeit	Ω	$1,24 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$

ist

$$B_0 = \sqrt{\frac{\rho_m \Omega}{\sigma}} \quad (7.40)$$

(siehe 7.2) und mit den Werten für Merkur wie sie in Tabelle 7.3 gegeben sind, ergibt sich $B_0 \approx 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ T}$. Daher ergibt sich ein mittleres, dimensionloses, externes Feld von $8,8 \cdot 10^{-4}$, während das interne Dipolfeld im voll entwickelten magnetostrophischen Gleichgewicht in der Größenordnung 1 liegt. Damit erscheint es unwahrscheinlich, dass ein voll entwickelter Dynamo im Modell vom externen Feld beeinflusst wird.

In Realität beträgt das interne Dipolfeld in etwa 190 nT (Anderson et al. 2012) an der Oberfläche des Planeten. Geometrisch nimmt das interne Feld nach innen zu, während das externe Dipolfeld konstant ist. Die Kern-Mantel-Grenze liegt bei rund 2000 km Abstand zum Planetenzentrum (Smith et al. 2012). Dies resultiert in einem Verstärkungsfaktor von

$$\gamma = \left(\frac{R_{\text{CMB}}}{R_{\text{M}}} \right)^3 = 1,82 \quad (7.41)$$

und damit einem internen Dipolfeldkoeffizienten (in Bezug auf die Kern-Mantel-Grenze) von 345 nT. Damit wäre das Verhältnis von externem zu internem Feld gerade 0,47. Dies lässt einen Einfluss des externen Feldes wesentlich realistischer erscheinen.

Das relativ (zu einem voll entwickelten Magnetfeld eines planetaren Dynamos) schwache externe Feld erfordert eine spezielle Dynamosimulation, damit der Feedback einen Einfluss auf den Dynamoprozess haben kann. In dieser Arbeit wurde der Dynamo sehr schwach initialisiert. Dann gewinnt der Dynamo an Stärke und das externe Feld kann auf ihn einwirken. Das ist das gleiche Vorgehen wie es schon bei den vereinfachten kinematischen Simulationen (s. Kapitel 6.3) angewendet wurde.

7.3 Der Feedback bei schwach überkritischen Dynamos

Gómez-Pérez und Wicht (2010) simulierten einen Dynamo unter dem Einfluss eines magnetosphärischen Feldes. Zur Modellierung verwendeten sie das gleiche Simulationsprogramm *MAGIC*. Bei diesen Simulationen verwendeten sie jedoch für die Antwortfunktion ein konstantes externes Feld - die Ausrichtung des externen Feldes bleibt selbst nach einer Umkehr des internen Feldes konstant. Damit geht das Modell von einem initial negativen

Feedback nach einer Feldumkehr in einen positiven Feedback über. Dieser Ansatz für das externe Feld ähnelt somit dem von Sarson et al. (1999). Als relative Antwortfunktion resultiert damit eine Singularität für verschwindende interne Felder. Die Kontrollparameter von Gómez-Pérez und Wicht (2010) sind die Gleichen wie in dieser Arbeit, weichen aber in der magnetischen Prandtl-Zahl ($Pm = 2$) und den verwendeten Rayleigh-Zahlen ($Ra = \{13, 20, 30\}Ra_c$; für die Definition von Ra_c siehe Kapitel 5.5) ab. Für jeweils eine Rayleigh-Zahl wurden verschieden starke externe Felder vorgegeben. Bei der Rayleigh-Zahl $Ra = 13Ra_c$ ist der Dynamo normalerweise in einem dipoldominierten Regime, bei dem keine Dipolumkehr zu erwarten ist. Ab einer kritischen externen Feldstärke wird jedoch eine Umkehr eingeleitet. Bei dieser kritischen externen Feldstärke sinkt die Gesamtselasserzahl vor der Umkehr auf ca. 12% des normalen Werts ohne externem Feld. Nach der Umkehr befindet sich der Dynamo in einem positiven Feedback und die Elsasser-Zahl übersteigt schließlich die Gewöhnliche Elsasser-Zahl um ca. 11%. Das Verhalten der kinetischen Energie ist hierbei zur Elsasser-Zahl antiproportional. Dies deutet darauf hin, dass die Lorentzkraft die Strömung behindert. Bei anderen Feldstärken, die größer sind als die kritische, ist ein ähnliches Verhalten festzustellen. Auch bei der nächstgrößeren Rayleigh-Zahl, $Ra = 13Ra_c$, ist diese Verbindung der Elsasser-Zahl mit der kinetischen Energie festzustellen. Allerdings ist auch zu bemerken, dass je größer die Rayleigh-Zahl ist, desto leichter (bei kleineren externen Feldstärken) und schneller lässt sich eine Dipolumkehr erzwingen.

In einer Folgestudie untersuchten Gómez-Pérez und Solomon (2010) ein Dynamo-Modell bei $Ra = 13Ra_c$ unter Einfluss eines konstanten externen Feldes, aber mit wechselndem Vorzeichen, wenn das interne Dipolfeld eine Umkehr vollzieht. Diese Art der Antwortfunktion weist wiederum eine Singularität bei der relativen Antwortfunktion auf. Dies erscheint problematisch bei einer Polumkehr. Gómez-Pérez und Solomon (2010) zeigten, dass das externe Feld nur bei unrealistisch hohen Stärken einen Einfluss auf einen voll entwickelten Dynamo hat, in dem die Elsasser-Zahl geringfügig abgesenkt und die Reversal-Rate drastisch erhöht wird. Nur wenn der Dynamo schwach initialisiert wird, können auch schwächere externe Felder, wie sie von der Magnetosphäre zu erwarten sind, einen Effekt auf die Entwicklung des Dynamos ausüben. Die Elsasser-Zahl ist jedoch nie kleiner als Eins, was auf ein magnetostrophisches Gleichgewicht hindeutet.

Im folgenden werden die Ergebnisse der Simulationen (Heyner et al. 2011b) mit einem schwach überkritischen Dynamo präsentiert, wie es die Skalierungsgesetze in Kapitel 5.7 nahe legen. Die Modellierungen mit dem vereinfachten kinematischen Dynamo (s. Kapitel 6.3) haben gezeigt, dass die magnetische Reynoldszahl für einen dipoldominierten Feedbackdynamo nicht zu groß sein darf. Die magnetische Reynoldszahl wird jedoch in den 3D-Simulationen nicht explizit vorgegeben (im Gegensatz zu den kinematischen Modellierungen; s. Kapitel 6.3), sondern sie ergibt sich als diagnostischer Parameter. Generell hängt die magnetische Reynoldszahl bei planetaren Dynamosimulationen aber von den Kontrollparametern ab (s. Kapitel 5.7). Besonders wichtig ist dabei die Rayleigh-Zahl, also im Wesentlichen der super-adiabatische Temperaturkontrast, beziehungsweise der chemische Kontrast zwischen dem inneren Kern und der Kern-Mantel-Grenze. Um einen schwachen Dynamo zu erhalten, wird eine relativ kleine Rayleigh-Zahl gewählt: $Ra = 10Ra_c$. Die kritische Rayleigh-Zahl für den Beginn des Dynamoprozesses liegt bei ca. $5Ra_c$. Diese Größe wurde in einer Parameterstudie mit starken magnetischen Saatfeldern ermittelt. Außerdem wird die magnetische Prandtl-Zahl auf $2/3$ eingestellt. Betracht-

tet man die entdimensionalisierten Gleichungen (7.1) und (7.2), so ist zu erkennen, dass sowohl die magnetische Reynoldszahl als auch die Lorentzkraftdichte dadurch kleiner sind als im oft in der Literatur verwendeten Fall $Pm = 1$. Daher wird der Dynamo nochmals gehemmt und kann nicht so schnell an Stärke gewinnen. Dies hat sich als essentiell für die Beeinflussung mittels eines externen Feldes erwiesen (s. Kapitel 6.3). Im Gegensatz zu anderen Dynamosimulationen (z.B. Sarson et al. (1997)) wird das externe Feld nur an der Kern-Mantel-Grenze vorgegeben und nicht etwa im ganzen Kern initialisiert, damit die Simulationen möglichst realitätsnah bleiben. Das externe Feld benötigt also eine gewisse Zeit (von der Größenordnung einer magnetischen Diffusionszeit), um von außen in die Dynamozone einzudringen und seine Wirkung auf den Dynamo zu entfalten. Die magnetische Diffusionszeit ist proportional zur magnetischen Prandtlzahl:

$$\tau_\eta = \frac{D_0^2}{\eta} = \frac{\nu}{\eta} \tau_\nu = Pm \tau_\nu \quad . \quad (7.42)$$

Hierbei bezeichnet τ_ν die viskose Diffusionszeit, die als charakteristische Zeitskala zur Entdimensionalisierung der magnetohydrodynamischen Gleichungen (7.1)-(7.3) dient. Je kleiner Pm ist, desto schneller gelangt das externe Feld in den Kern und verkürzt somit die Kommunikationszeit. Die Ekman-Zahl wird auf 10^{-4} belassen, um die benötigten numerischen Ressourcen begrenzt zu halten. Dies macht auch den relativ hohen Wert der magnetischen Prandtl-Zahl im Vergleich zu realen Situation (vgl. Tabelle 7.1) notwendig, um überhaupt einen Dynamo zu erhalten. Das Verhältnis zwischen Kern-Mantel-Grenze und innerem Kernradius wird auf einen erdähnlichen Wert von $\chi = 0,35$ eingestellt, da bisher keine verlässlichen Abschätzungen bezüglich der Größe des inneren Kerns vom Merkur existieren (Breuer et al. 2010). Die Prandtl-Zahl wird bei Eins belassen, was für einen flüssigen Kern als durchaus realistisch betrachtet wird (Christensen und Wicht 2007). Als Grundlage für die Dynamosimulation dient die rein konvektive Lösung ohne Magnetfeld. Wenn sich die kinetische Energie des Kerns stabilisiert hat, wird dieser Lösung ein Saatmagnetfeld aufgeprägt und die eigentliche Dynamosimulation damit initiiert.

Als Referenzmodell wird ein Dynamo mit exakt gleichen Kontrollparametern und Anfangsbedingungen simuliert, dem allerdings kein externes Magnetfeld von der Magnetosphäre aufgeprägt wird. Dieses Referenzmodell zeigt, dass sich bei der oben beschriebenen Wahl der Kontrollparameter ein schwach überkritischer (langsam anwachsender) Dynamo ergibt, dessen äußeres Magnetfeld durch den achsensymmetrischen Dipol dominiert wird. In Abbildung 7.4 sind die zeitlichen Entwicklungen einiger ausgewählter diagnostischer Parameter für den Referenzdynamo dargestellt. Dort ist im Wesentlichen der Regimewechsel vom geostrophischen hin zum magnetostrophischen Gleichgewicht dargestellt. Die magnetische Energie wächst dabei langsam an, bis sie in etwa die Größenordnung der kinetischen Energie erreicht hat. Dann wächst die magnetische Energie kurzzeitig schneller an, während sich die kinetische Energie etwas absenkt. Gleichzeitig reduzieren sich die magnetische Reynoldszahl (von etwa 80 auf ca. 65) und die lokale Rossbyzahl (von 0,06 auf 0,05). Der Dynamo wird dadurch dipolar ausgeprägt aber auch weniger effizient und die magnetische Energie stagniert. Der kleine Wert der magnetischen Reynoldszahl zeigt, dass dieses Referenzmodell nur leicht überkritisch ist.

In Abbildung 7.5 ist gezeigt, wie sich die volumengemittelten Elsasser-Zahlen zeitlich bei einer Reihe von ausgewählten Simulationen mit und ohne Feedback entwickeln. Anschaulich kann man mit der Elsasser-Zahl auch die magnetische Gesamtenergie im Dy-

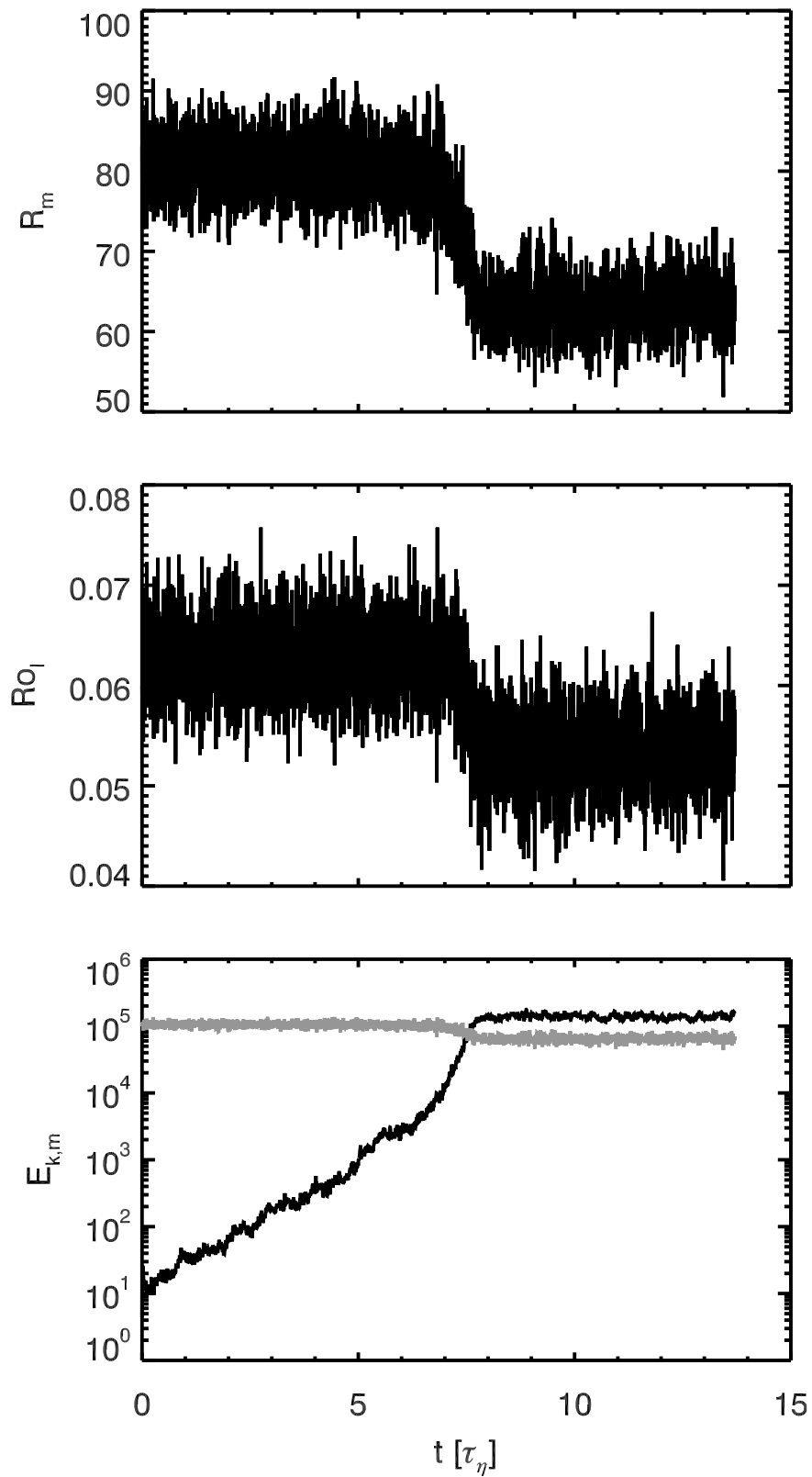


Abbildung 7.4: Zeitlicher Verlauf einiger ausgewählter diagnostischer Parameter für den Referenzdynamo. *Oben:* Magnetische Reynoldszahl für den gesamten äußeren Kern. *Mitte:* Lokale Rossbyzahl. *Unten:* Kinetische Energie (grau) und magnetische Energie (schwarz).

namo verbinden. Bei der Referenzsimulation (Fall a in Abbildung 7.5) wächst die Elsasserzahl von einem schwachen Saatfeld mit $\Lambda_{\text{vol, init}} \approx 10^{-4}$ langsam an und erreicht nach etwa 9 magnetischen Diffusionszeiten das Saturationsniveau von $\Lambda_{\text{vol}} \approx 1$. Allein diese Zeit deutet schon auf einen nur schwach überkritischen Dynamo hin - bei stark überkritischen Dynamos wäre diese Anwachszeit wesentlich kürzer (in der Größenordnung einer magnetischen Diffusionszeit).

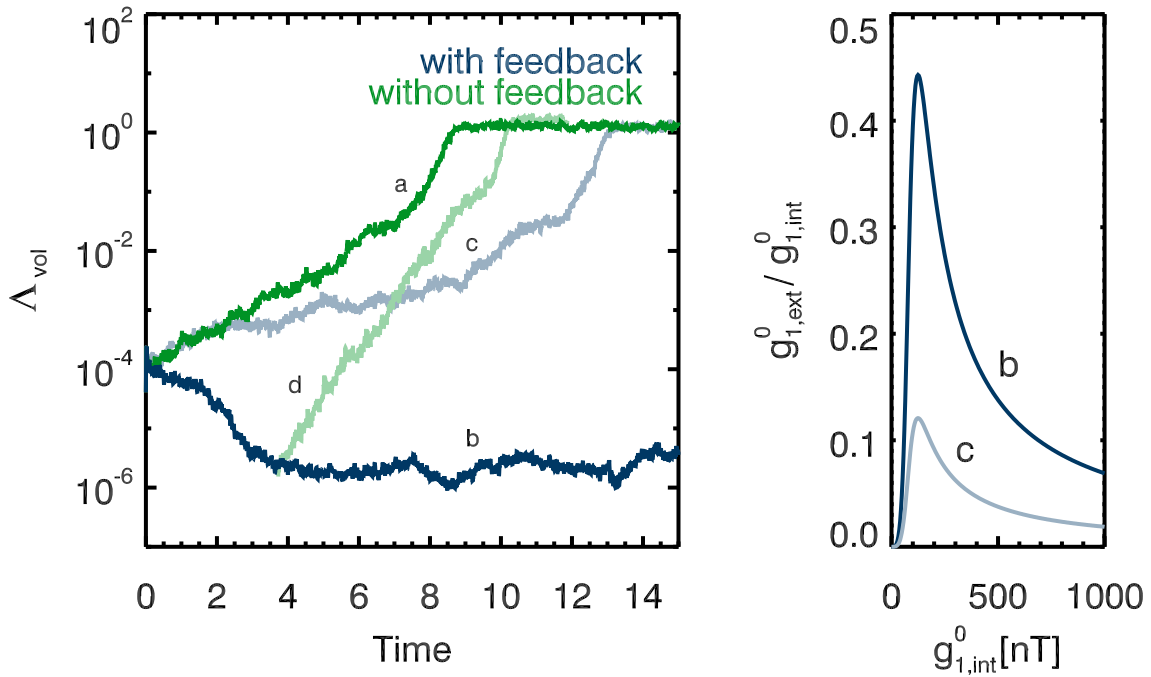


Abbildung 7.5: *Links*: Volumengemittelte Elsasser-Zahl in Abhängigkeit der Zeit in Diffusionszeiten. *Rechts*: Relative Antwortfunktion für die links dargestellten Fälle. *Fall a*: Referenzsimulation ohne Feedback. *Fall b*: Simulation mit Feedback und relativ starkem externen Feld. *Fall c*: Simulation mit Feedback und relativ schwachem externen Feld. *Fall d*: Kontrollsimulation ohne Feedback - ausgehend von der Simulation mit Feedback (b) nach 3 Diffusionszeiten. Abbildung aus Heyner et al. (2011b).

Es stellt sich die Frage, ob der magnetosphärische Feedback einen im System vorhandenen schwachen Zustand stabilisiert. Wie in Kapitel 5.5 dargestellt wird allgemein die Existenz von schwachen Dynamos mit einem Kräftegleichgewicht zwischen Lorentzkraft und viskosen Kräften postuliert. Die Hartmann-Zahl, die als Indikator für eine klassische schwache Feldlösung dient (siehe Kapitel 5.5), ist für den Fall b in Abbildung 7.5 etwa 0,14. Dieser Wert ist nur eine Größenordnung von der klassischen schwachen Feldlösung entfernt, aber die Kontrollsimulation d zeigt eindeutig, dass das externe Feld für die Stabilisierung verantwortlich ist. Wenn der reale Merkurdynamo eine Hartmann-Zahl von 1 besäße, würde sich daraus eine charakteristische Magnetfeldstärke von ca. 0,1 nT ableiten. Das Dipolmoment wäre damit viel zu schwach gegenüber dem tatsächlich nachgewiesenen Feld.

Mit eingeschaltetem Feedback jedoch ergibt sich eine völlig andere Entwicklung. Die relative Antwortfunktion $g_{1,\text{ext}}^0 / g_{1,\text{int}}^0$ bestimmt hier den Ausgang der Simulation (wie mit den Berechnungen in Kapitel 6.4 gezeigt wurde). Die verwendeten Funktionen sind für

die Simulationsbeispiele in der Abbildung 7.5 (*rechts*) gezeigt. Die Konstante c_1 legt unter anderem die Höhe des Maximums fest. Für ausreichend große Werte von c_1 (Fall b in Abbildung 7.5, mit $c_1 = 70$ nT und $c_2 = 96$ nT) kann der Dynamo schon mit einem charakteristischen $g_{1,\text{ext}}^0/g_{1,\text{int}}^0$ -Verhältnis von 0,1 gesättigt werden. Das interne, achsensymmetrische Dipolfeld (skaliert auf typische Merkurwerte, vgl. Tabelle 7.3) beträgt im Mittel 60 nT und das externe Dipolfeld dementsprechend 6 nT. Der interne Dipol bleibt zeitlich relativ stabil. In der hier betrachteten Simulation ist keine Umkehrung wie von Sarson et al. (1999) beobachtet zu verzeichnen.

Das interne Dipolfeld ist offensichtlich zu schwach, um das gemessene Dipolfeld Merkurs *exakt* zu erklären. Die Simulation zeigt jedoch auf drastische Weise wie der Dynamo auf das externe Feld reagieren und in seinem Wachstum eingeschränkt werden kann. So weicht die Elsasser-Zahl um annähernd sechs Größenordnungen vom magnetostrophischen Gleichgewicht ab. Das ist auch signifikant kleiner als bei den vorangegangenen Untersuchungen von Gómez-Pérez und Solomon (2010). Damit ist dann die Lorentzkraft viel zu schwach, als dass sie den konvektiven Fluss beeinflussen könnte. Daher stellt sich dann das geostrophische Gleichgewicht ein, da die Corioliskraft in der Kräftebilanz über die Lorentzkraft dominiert. Auf der magnetischen Seite limitiert beim Feedbackdynamo das externe Feld direkt die Induktionswirkung und damit das Wachstum des Dynamos. Es handelt sich also um einen reinen kinematischen Effekt. Als Kontrolltest wurde noch das externe Feld nach ca. drei Diffusionszeiten abgeschaltet (Fall d in Abbildung 7.5). Daraus resultiert ein erneuter Anstieg und eine Sättigung des Dynamos im magnetostrophischen Regime, ähnlich wie beim Referenzdynamo. Ist das Maximum der relativen Antwortfunktion kleiner (Fall c in Abbildung 7.5, mit $c_1 = 19$ nT), so reicht das externe Feld nicht aus, um den Dynamo in einer schwachen Feldlösung zu halten.

Das äußere Magnetfeld, das vom Dynamo an der Kern-Mantel-Grenze produziert wird, unterscheidet sich in den Simulationen mit und ohne Feedback. In Abbildung 7.6 ist die radiale Magnetfeldkomponente an der Kern-Mantel-Grenze dargestellt. Dort ist auch der Schnittkreis zwischen dem imaginären Tangentialzylinder mit der Kugeloberfläche eingezeichnet. Man kann sehen, dass bei der geostrophischen Simulation (mit Feedback) der magnetische Fluss eher an diesem Schnittkreis konzentriert wird. Im magnetostrophischen Fall (ohne beziehungsweise mit vernachlässigbarem externen Feld) existieren auf allen polaren Breiten Zonen mit konzentriertem Magnetfeld. Ebenfalls ist der magnetische Oktupolanteil bei der Simulation mit Feedback, der in der Referenzsimulation nicht so ausgeprägt ist, zu sehen.

Um das gemessene Magnetfeld des Planeten global mit den Dynamomodellen zu vergleichen, kann das magnetische Spektrum herangezogen werden. In Abbildung 7.7 sind die internen Mauersberger-Lowes Spektren nach Gleichung (2.14) für den Fall mit und ohne Feedback dargestellt (für die Fälle *a* und *b* in Abbildung 7.5). Bei der Simulation mit Feedback erkennt man, dass die ungeraden magnetischen Moden dominieren. Dies lässt sich damit erklären, dass der magnetische Fluss eher in polaren Breiten konzentriert ist (s. Abbildung 7.6). Bei der Simulation mit Feedback verbleibt der Dynamo im geostrophischen Gleichgewicht und die Taylor-Säulen transportieren den magnetischen Fluss zu den geographischen Polen. Eine Flusskonzentration an den Polen bedeutet, dass gerade diejenigen magnetischen Moden betont werden, die antisymmetrisch bezüglich des Äquators (dipolar, oktupolar, usw.) sind.

Das Verhältnis vom internen, achsensymmetrischen Dipol zum Quadrupol ist haupt-

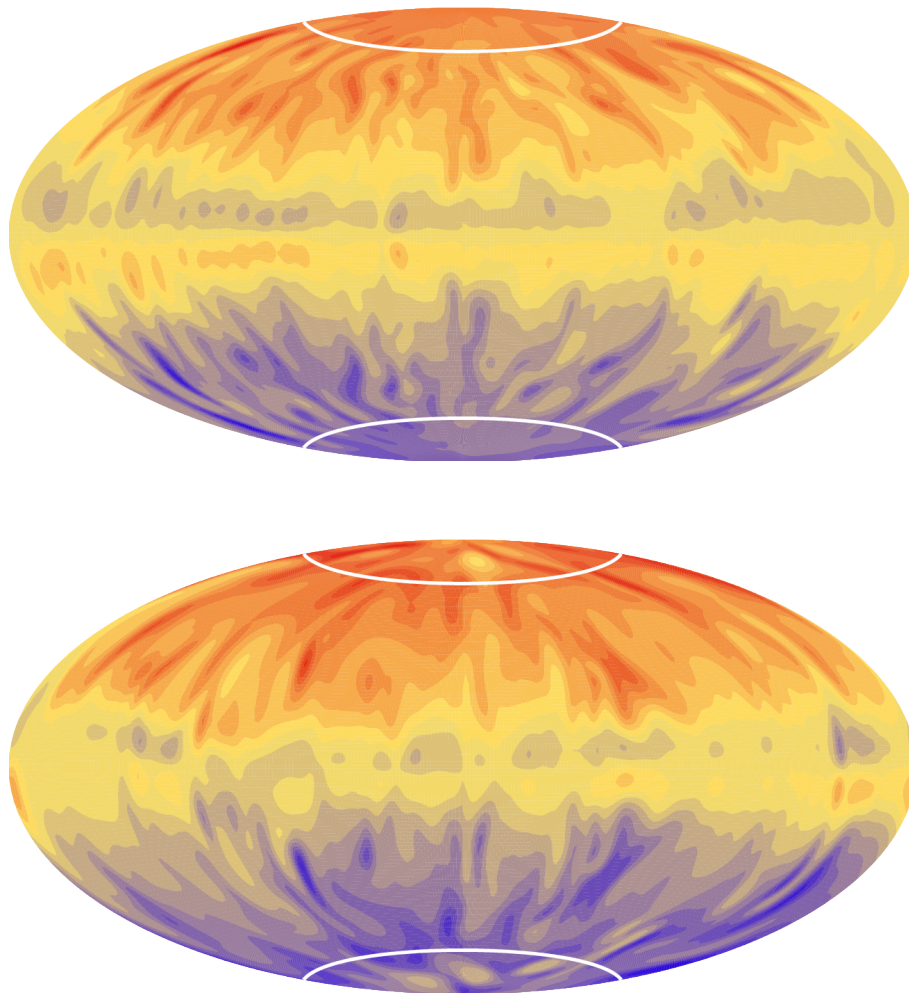


Abbildung 7.6: Radiales Magnetfeld an der Kern-Mantel-Grenze. Blau bedeutet ein einwärts gerichtetes Magnetfeld während rot für ein auswärts gerichtetes Magnetfeld steht. Die weiße Linie zeigt die Schnittlinie zwischen Tangentialzylinder und Kern-Mantel-Grenze (siehe 7.1). Oben ist der Dynamo mit Feedback gezeigt und unten der Referenzdynamo (ohne Feedback). Abbildung aus Heyner et al. (2011b).

sächlich vom zu Grunde liegenden Dynamomodell abhängig. Oberhalb einer gewissen Rayleigh-Zahl verliert der Dipol seine Dominanz und wird vergleichbar zum Quadrupol, oder höheren harmonischen Moden.

Wie in Kapitel 5.5 dargestellt, zeichnet sich eine geostrophische Strömung durch eine minimale Variation der z -Vortizität entlang der Rotationsachse des Planeten aus. Der Grad der Geostrophie wurde bei den oben gezeigten Beispielsimulationen bestimmt. Dazu wurde in *MAGIC* der in z -Richtung gemittelte Anteil der kinetischen Energie G relativ zur gesamten kinetischen Energie berechnet. Ohne Magnetfeld ergibt sich ein Wert von: $G_{\text{konv}} \approx 0,47$. Bei der Referenzsimulation im magnetostrophischen Gleichgewicht (s. Kapitel 5.5) wird die Beschränkung der Konvektion durch die nun dynamisch bedeutende Lorentzkraft aufgehoben und es ist eine stärkere Variation entlang der z -Achse erlaubt. Bei typischen Dynamosimulationen (wie beim Referenzmodell) stellt sich oft das magnetostrophische Gleichgewicht ein. Im Falle der Referenzsimulation ergibt sich der geostro-

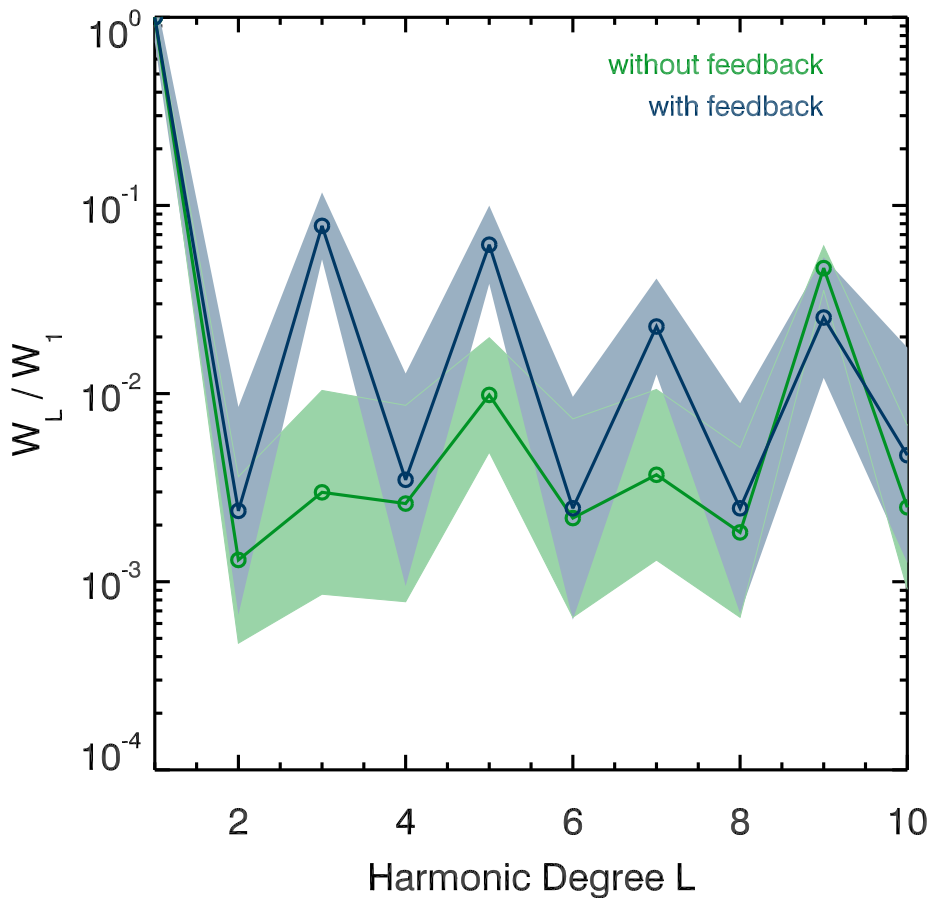


Abbildung 7.7: Vergleich der magnetischen Spektren. Gezeigt sind die Mauersberger-Lowes-Spektren W_L der magnetischen Grade normiert auf den Dipol ($L=1$) bezüglich der Planetenoberfläche. In blauen (grünen) Punkten ist das Spektrum für den Dynamo mit (ohne) Feedback dargestellt. Die eingezeichneten Linien helfen nur der Visualisierung. Die eingefärbten Zonen um die Punkte stellen die Standardabweichung der logarithmischen Größen dar ($\delta = \sqrt{1/N \sum \lg W - \lg \langle W \rangle}$). Die Spektren wurden über eine magnetische Diffusionszeit gemittelt. Abbildung aus Heyner et al. (2011b).

phische Energieanteil zu $G \approx 0,36$ und zeigt damit den geringeren Einfluss der Corioliskraft über das Proudman-Taylor-Theorem (s. Kapitel 5.5). Die Taylor-Säulen sind radial mehr ausgestreckt und transportieren den Fluss auch in äquatoriale Breiten (Sakuraba und Roberts 2009, Hori et al. 2010).

Die Geostrophie im äußeren Kern macht sich auch in der Struktur der Magnetfeld generierenden Zonen bemerkbar. In Abbildung 7.10 ist die lokale magnetische Reynoldszahl

$$\text{Rm}_l = \frac{\left| (\underline{\nabla} \times \underline{v}) \times \underline{B} \right|}{\left| \underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{B} \right|} \quad (7.43)$$

gezeigt. An dieser Stelle wird die Beschränkung der Konvektion auf die Taylor-Säulen nochmals deutlich. Beim Referenzdynamo ohne Feedback sind die Felderzeugungsregionen (rote Flächen in Abbildung 7.10) radial vom inneren Kern bis zur Kern-Mantel-Grenze ausgestreckt. Im Gegensatz dazu ist die radiale Ausdehnung beim Feedbackdynamo

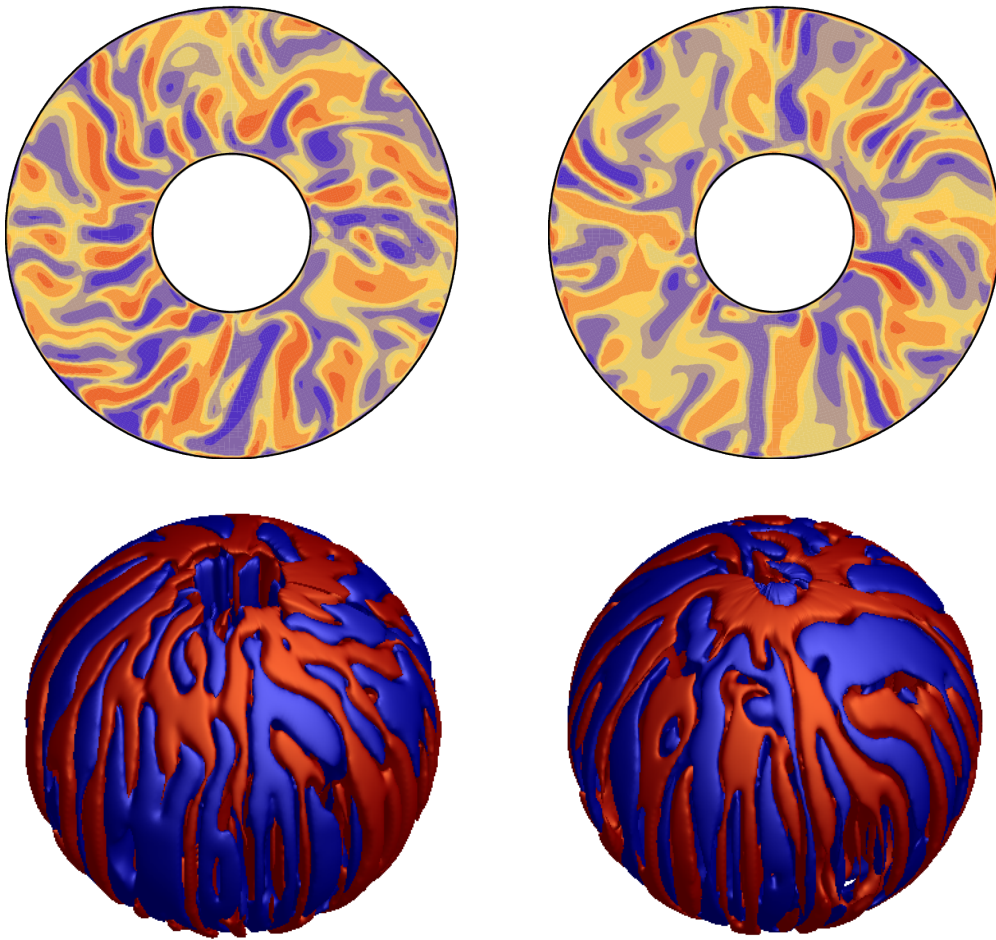


Abbildung 7.8: z -Vortizität in den Dynamosimulationen. Blaue (rote) Farbe bedeutet negative (positive) Vortizität. *Links*: Simulation mit Feedback. *Rechts*: Simulation ohne Feedback. *Oben*: z -Vortizität in einem äquatorialen Schnitt. *Unten*: Isoflächen der z -Vortizität. Abbildungen aus Heyner et al. (2011b).

mo stark eingeschränkt. Die diagnostischen Parameter, wie die magnetische Reynoldszahl und die lokale Rossbyzahl, unterscheiden sich nicht von der konvektiven Lösung, beziehungsweise von den Anfangswerten (s. Abbildung 7.4).

Wie schon zum Beispiel Sakuraba und Kono (2000) gezeigt haben, ändert sich die Rotationsrate des inneren Kerns (Superrotation), wenn die Lorentzkraft im Vergleich zu den anderen herrschenden Kräften an Bedeutung gewinnt. Dies ist auch beim Referenzdynamo zu bemerken (s. Abbildung 7.9). Für die Änderung der Rotationsrate kann eine Kombination von Lorentzkräften mit viskosen Kräften verantwortlich gemacht werden. Die viskosen Kräfte sind im magnetostrophischen Gleichgewicht um den Faktor 10000 stärker als die Lorentzkräfte, aber kurz vor dem Erreichen des Regimewechsels sind die Lorentzkräfte in Spitzen sehr viel stärker und das Verhältnis der Drehmomente (Lorentzkraft zu viskosen Kräften) erreicht kurzzeitig Werte zwischen 10^{-3} und 10^{-2} . Nach dem Übergang zum magnetostrophischen Gleichgewicht beträgt die relative Drehgeschwindigkeit in dimensionslosen Einheiten nur ca. 100. Wenn man $1/\tau_v$ als Skalierung für die

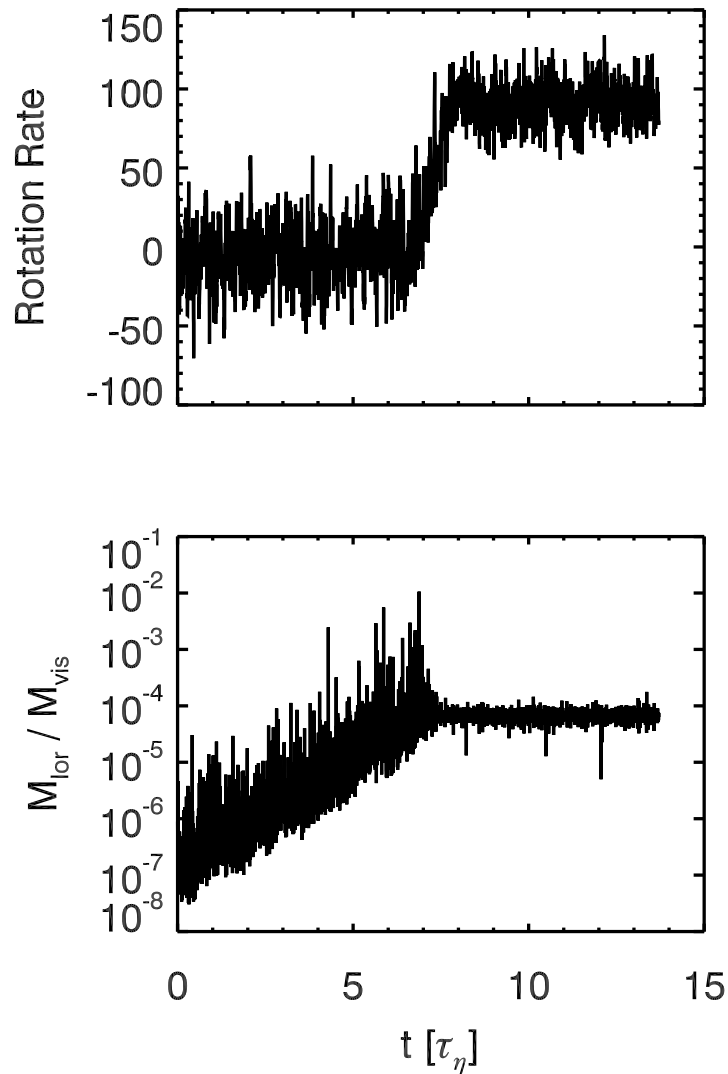


Abbildung 7.9: *Oben:* Zeitliche Entwicklung der Rotationsrate des inneren Kerns relativ zum Mantel bei der Referenzdynamosimulation. *Unten:* Verhältnis der Drehmomente durch die Lorentzkraft und durch viskoser Kräfte auf den inneren Kern in Abhängigkeit von der Zeit.

inverse Zeit und als Längenskala etwa 1000 km heranzieht, ergibt sich dieser Wert zu $8,85 \cdot 10^{-11} \text{1/s}$. Dies ist fast um eine Million mal kleiner als die Rotationsrate Merkurs. Für den Feedbackdynamo wird also erwartet, dass der innere Kern mit dem Mantel korotiert. Die Korotation lässt sich nicht über die Librationsmessung bestimmen, da diese Methode von einer unterschiedlichen Rotation des inneren Kerns und dem Mantel ausgeht.

Ähnlich wie am Ende von Kapitel 6.3 kann auch hier die Reaktion des vollständigen MHD-Systems mit einer systematischen Variation der Antwortfunktion untersucht werden. Dazu wurden Simulationen mit relativen Antwortfunktionen unternommen, die in Abbildung 7.11 gezeigt sind. Dabei wurde die Maximumstelle beibehalten, jedoch die Amplitude des Maximums variiert. Die zeitliche Entwicklung der magnetischen Gesamtenergie ist in Abbildung 7.12 gezeigt. Nur der Dynamo mit der geringsten externen

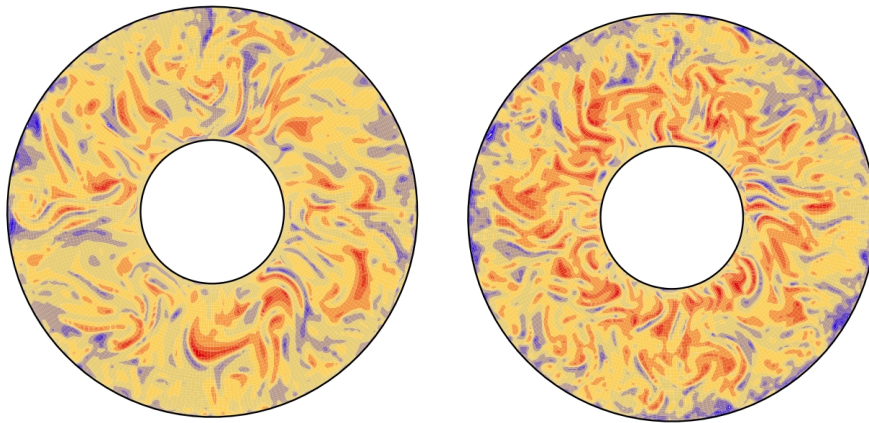


Abbildung 7.10: Logarithmische Darstellung (drei Dekaden) der lokalen magnetischen Reynoldszahl Rm_l in einem äquatorialen Schnitt durch den äußeren Kern. Rot steht für eine hohe Rm_l (Feldadvektion dominiert) und Blau für eine niedrige Rm_l (Diffusion dominiert). *Links*: Ohne Feedback bei $t = 13,6 \tau_\eta$. *Rechts*: Mit Feedback bei $t = 13,4 \tau_\eta$.

Feldamplitude (654) kann dem Einfluss des Feedbacks entkommen, gewinnt an Stärke wie der Referenzdynamo ohne Feedback und sättigt sich im magnetostrophischen Gleichgewicht.

Die Dipolfelder der einzelnen Simulationen entwickeln sich auf ähnliche Grenzwerte zu wie in Abbildung 7.13 gezeigt ist. Die Simulationen sind so initialisiert, dass das externe Feld zunächst in Sättigung ist und sich später zusammen mit dem internen Dipol abschwächt. Interessanterweise entwickelt sich das Verhältnis vom externen zu internen Feld in etwa gegen den gleichen Grenzwert von ca. 0,1 zu (Abbildung 7.13, unten). Dieses Verhalten wurde schon in den kinematischen Simulationen in Kapitel 6.4 beobachtet. Dort bestimmte die magnetische Reynoldszahl das Verhältnis von externem zu internem Feld, für das eine stationäre Lösung existiert.

In einer zweiten Studie wurde die Antwortfunktion erneut verändert und das Maximum der relativen Antwortfunktion noch weiter erhöht, wie in Abbildung 7.14 gezeigt ist. Zusätzlich dazu ist die Maximumstelle bei einem höheren Wert als zuvor - der Anstieg der Antwortfunktion verläuft also hier langsamer. Die Entwicklung der magnetischen Energie ist in Abbildung 7.16 gezeigt. Nur bei der Simulation mit dem schwächsten externen Feld kann der Feedback den Dynamo nicht stabilisieren, alle anderen Simulationen werden nach etwa einer magnetischen Diffusionszeit quasi-stationär. Mit der jetzigen Antwortfunktion gibt es größere Unterschiede bei den Grenzwerten, denen die magnetische Energie der einzelnen simulierten Dynamos entgegenstreben. Auch die internen Dipole zeigen jetzt eine deutliche Auffächerung von ca. -50 nT bis unter -200 nT bei den stationären Simulationen. Durch die Variation der Antwortfunktion wird hier die große Breite der möglichen stabilen Zustände hinsichtlich des internen Dipolmoments sichtbar. Auch bei dieser Gruppe von Simulationen stellt sich wieder das Verhältnis von ca. 0,1 vom externen zu internen Magnetfeld ein. Es hat sich insgesamt gezeigt, dass der Feedbackdynamo zu einer niedrigen internen Dipolfeldstärke führen kann, wenn der Dynamo schwach initialisiert und nicht zu stark durch die Konvektion im Kern angetrieben wird. Der stationäre Zustand befindet sich bisher stets auf dem ansteigendem Ast der relati-

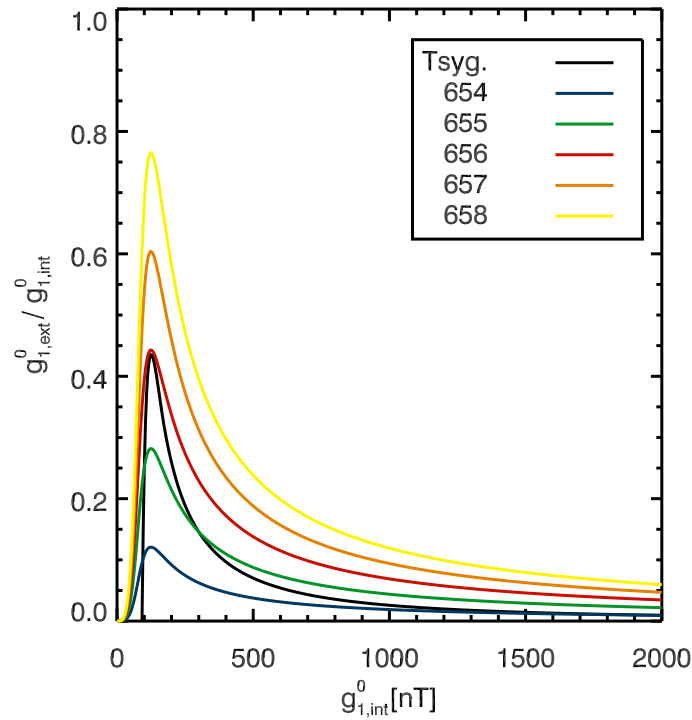


Abbildung 7.11: Relative magnetosphärische Antwortfunktionen mit unterschiedlicher Amplitude, aber gleicher Maximumsstelle wie bei der aus dem Tsyganenko-Modell ermittelten Funktion (schwarz). Die Zahlen in der Legende sind fortlaufende Identifikationsnummern der Simulationen und haben keine spezielle physikalische Bedeutung. Die rote Linie (656) zeigt die relative Antwortfunktion wie in Abbildung 7.5, Fall *b*. Die blaue Linie (654) ist identisch mit Fall *c* in Abbildung 7.5.

ven Antwortfunktion. Dieser ist aber durch die Störung des Magnetopausenstromsystems durch den Planeten hervorgerufen. Diese Situation ist bisher analytisch mit magnetosphärischen Modellen und auch mit den Simulationen des Sonnenwindes unzureichend erfasst und bedarf einer gezielten Studie in der Zukunft.

Der Feedbackmechanismus kann nur dann den gesamten Dynamoprozess dämpfen, wenn die Simulation mit einem schwachen Saatfeld gestartet wird. Daraus könnte man ableiten, dass es in der Realität auch eine Phase mit schwachem internen Feld bedarf, um den planetaren Dynamo mittels des Feedbacks in einer schwachen Feldlösung einzufangen. Für das schwache Saatfeld gibt es mehrere mögliche Szenarien. Es erscheint logisch, dass beim Beginn des Dynamoprozesses nur ein schwaches Saatfeld von der Sonne (auf Grund der Großen Entfernung) vorherrschte. Auf der anderen Seite sind die Planeten nach dem gravitativen Kollaps und der Differenzierung relativ heiß und starten ihre thermische Konvektion eher kräftig (Breuer et al. 2010), was ein schnelles Anwachsen des Dynamos erwarten lässt. Eine andere Möglichkeit wäre, dass der Einschlag, der für das Caloris-Becken auf Merkur verantwortlich war, zeitweilig den Dynamoprozess zum Erliegen gebracht hat (Arkani-Hamed und Ghods 2011). Die thermische Entwicklung Merkurs eröffnet noch eine weitere Möglichkeit. Der heutige Wärmefluss durch die Kern-Mantel-Grenze ist aller Wahrscheinlichkeit nach subadiabatisch, was bedeutet, dass die Konvektion und damit der heutige Dynamoprozess hauptsächlich durch die Frei-

setzung von latenter Wärme getrieben wird (Wicht et al. 2007). Thermische Entwicklungsmodelle (Breuer et al. 2008) lassen den Schluss zu, dass der Temperaturgradient subadiabatisch wurde, bevor es zum Ausfrieren des inneren Kerns kam. Damit ergibt sich also ein Zeitraum, in dem keine (beziehungsweise für einen Dynamoprozess nicht ausreichende) Konvektion im Merkurkern vorherrschte. Das Wachstum des inneren Kerns kann damit den Dynamoprozess relativ spät (auf einer geologischen Zeitskala) neu starten lassen. Möglich wäre auch ein Szenario eines schwachen internen Dipols während einer lang andauernden Feldumkehr (von der Dauer einer magnetischen Diffusionszeit).

In Zukunft sollte der Raum der Kontrollparameter für die Dynamosimulation weiter untersucht werden. Besonders wichtig ist eine Einschätzung, wie sich eine Verringerung der Ekman- und magnetischen Prandtl-Zahl auf den Feedbackdynamo auswirkt. Dafür steigt aber der Bedarf an numerischen Ressourcen beträchtlich, da die benötigte Gitterauflösung ansteigt. Eine Verringerung der magnetischen Prandtl-Zahl ist problematisch, da damit auch die magnetische Diffusion ansteigt und es daher schwieriger wird, überhaupt einen funktionierenden Dynamo zu simulieren.

7.4 Einfluss der Größe des inneren Kerns auf den Feedbackmechanismus

Die äußere Grenze der Dynamozone, die Kern-Mantel-Grenze, ist relativ gut bestimmt (Smith et al. 2012). Dagegen ist die innere Grenze, also die Größe des hypothetischen festen Kerns, nicht so gut festgelegt. In den Dynamosimulationen dieser Arbeit wurde stets

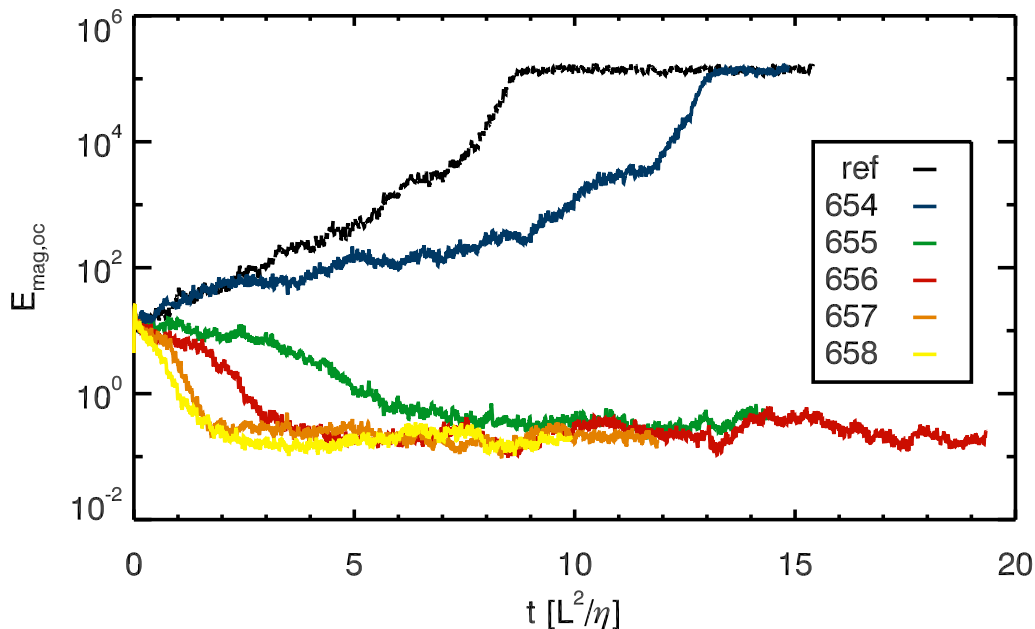


Abbildung 7.12: Zeitlicher Verlauf der magnetischen Energie im Kern für verschiedene magnetosphärische Antwortfunktionen (farbige Linien), die in Abbildung 7.11 dargestellt sind. Die Referenzsimulation ist in schwarz dargestellt. Die Einheit der Zeit ist eine magnetische Diffusionszeit.

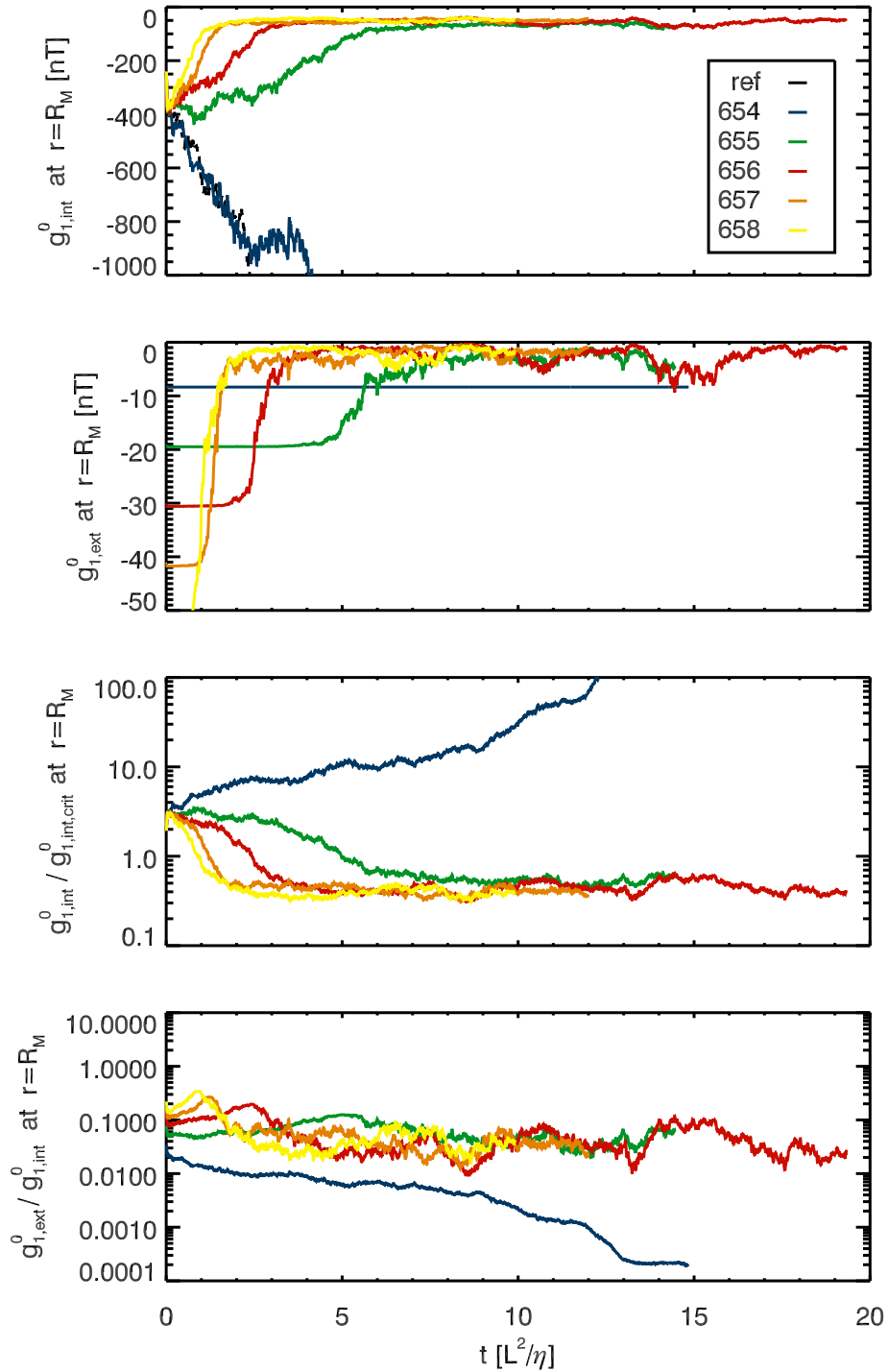


Abbildung 7.13: Zeitliche Entwicklung der Dipolfelder an der Planetenoberfläche. Die Farben sind identisch zu denen in Abbildung 7.12. 1. *Teilabbildung*: Interner, achsensymmetrischer Dipol. 2. *Teilabbildung*: Externer, achsensymmetrischer Dipol. 3. *Teilabbildung*: Interner, achsensymmetrischer Dipol normiert auf das Maximum der relativen Antwortfunktion $g_{1,int,crit}^0$. 4. *Teilabbildung*: Verhältnis des externen zum internen Dipol.

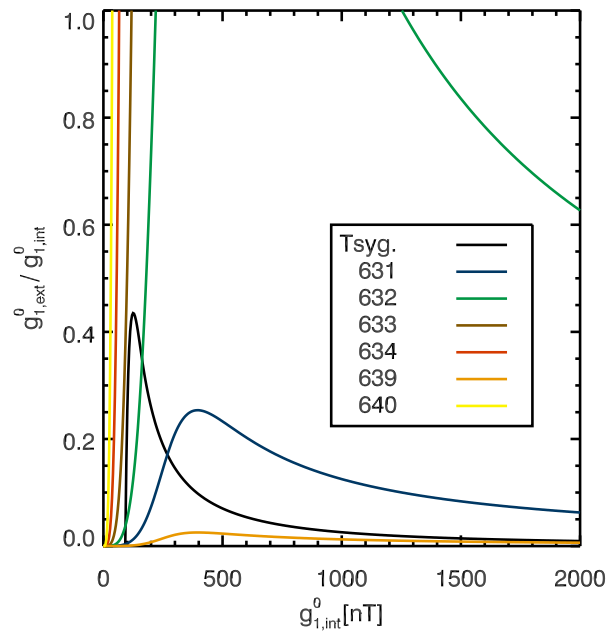


Abbildung 7.14: Variation der relativen Antwortfunktion. Die Zahlen in der Legende sind wieder fortlaufende Identifikationsnummern der Simulationen. Die Antwortfunktionen sind die gleichen wie in Abbildung 7.11 aber mit verschobenem Maximum und höheren Amplituden.

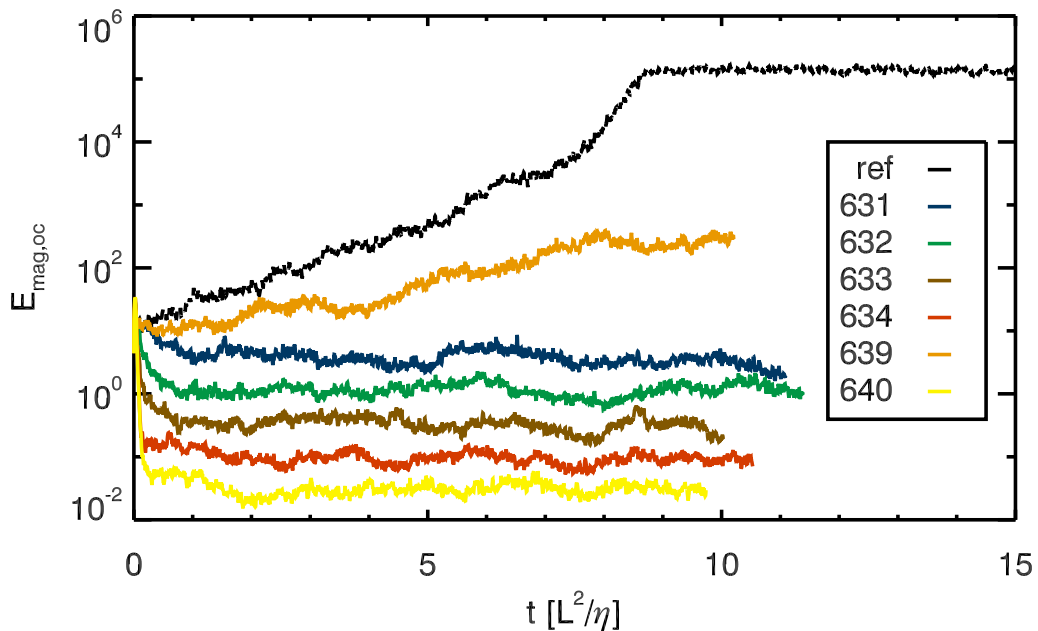


Abbildung 7.15: Zeitlicher Verlauf der magnetischen Energie im Kern für verschiedene magnetosphärische Antwortfunktionen (farbige Linien), die in Abbildung 7.14 dargestellt sind. Die Referenzsimulation ist in schwarz dargestellt. Die Einheit der Zeit ist eine magnetische Diffusionszeit.

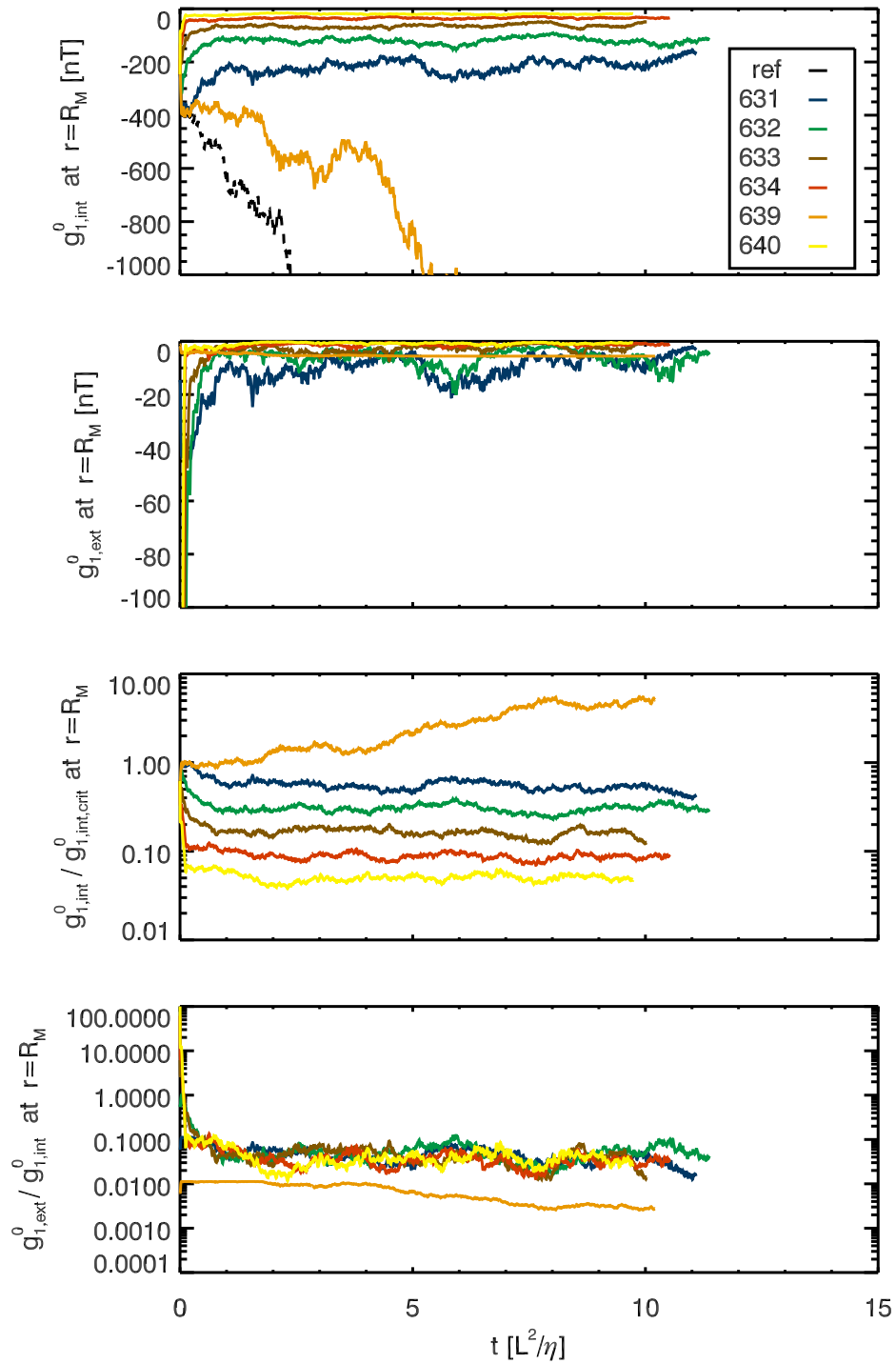


Abbildung 7.16: Zeitliche Entwicklung der Dipolfelder an der Planetenoberfläche. Die Farben sind identisch zu denen in Abbildung 7.14 und 7.15. 1. Teilabbildung: Interner, achsensymmetrischer Dipol. 2. Teilabbildung: Externer, achsensymmetrischer Dipol. 3. Teilabbildung: Interner, achsensymmetrischer Dipol normiert auf das Maximum der relativen Antwortfunktion $g_{1,int,crit}^0$. 4. Teilabbildung: Verhältnis des externen zum internen Dipol.

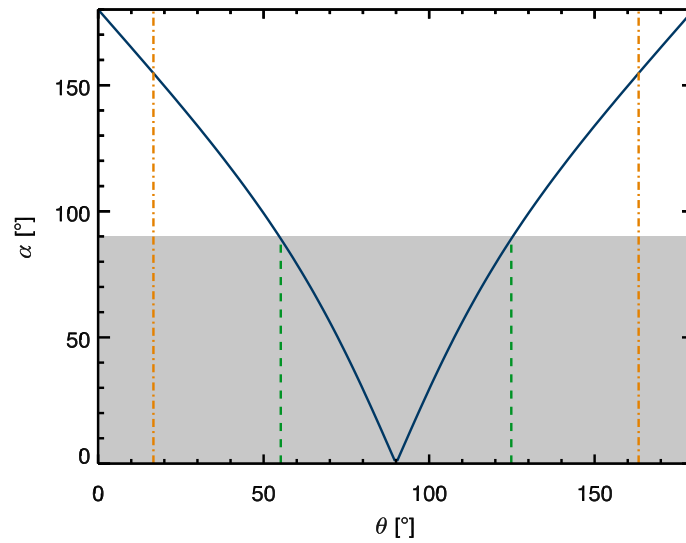


Abbildung 7.17: Winkel α zwischen internem und externem Dipolfeld auf der Planetenoberfläche in Abhängigkeit vom Polwinkel θ . Der untere grau schattierte Bereich zeigt die Situation mit eher gleicher Ausrichtung und der darüber mit eher entgegengesetzter Ausrichtung an. Die grüne, gestrichelte Linie markiert den Übergang zwischen den Ausrichtungen (bei ca. $\theta = 55,2^\circ$ und $124,8^\circ$). Die orangene Linie zeigt den Schnittpunkt des Tangentialzylinders mit der Kern-Mantel-Grenze (bei ca. $\theta = 16,7^\circ$) und entsprechend am Gegenpol an.

ein erdähnliches Verhältnis von $\chi = R_{\text{ICB}}/R_{\text{CMB}} = 0,35$ angenommen. Wenn die Konvektion innerhalb des Dynamos annähernd geostrophisch ist, dann prägen im Wesentlichen die Taylor-Säulen das Konvektionsmuster. Diese Säulen sind dann um den Tangentialzylinder angeordnet. Dieser schneidet bei $\theta_0 = 90^\circ - \arccos(700/2440) = 16,7^\circ$ die Oberfläche (vgl. Abbildung 7.1) bei einem angenommenen Kernradius von 2000 km und $\chi = 0,35$. Ein größerer innerer Kern verschiebt die Säulen weiter nach außen, so dass diese sich mehr dem hermeographischen Äquator annähern. Wenn das externe Magnetfeld neben der magnetischen Diffusion auch über die Konvektion in den Zyklonen (s. Kapitel 5.5) in den Kern transportiert wird, lohnt es sich, einmal genau den Aufbau des Feedbackdynamomodells zu studieren.

Das Feedbackdynamomodell basiert darauf, dass internes und externes Dipolfeld an der Kern-Mantelgrenze antiparallel sind. Diese Aussage ist aber nur eine Näherung der tatsächlichen Situation. Wenn man an der Oberfläche einen internen, achsensymmetrischen Dipol mit einem externen überlagert und den Winkel (hier α genannt) zwischen internem und externem Feld betrachtet, so erkennt man, dass in einer Umgebung des Äquators die Felder eher parallel sind ($0 \leq \alpha \leq 90^\circ$). Der Winkel α in Abhängigkeit vom polaren Winkel θ ist in Abbildung 7.17 dargestellt. Man erkennt einen Übergang von der antiparallelen zur parallelen und wieder zur antiparallelen Situation, wenn man α von Pol zum Äquator und weiter zum Gegenpol betrachtet. Insgesamt bleibt aber festzuhalten, dass das externe Magnetfeld für einen größeren Bereich dem internen entgegengesetzt ausgerichtet ist.

Wenn nun der innere Kern aber wesentlich größer ist, verschiebt sich der Schnittkreis des Tangentialzylinders weiter nach außen (weg von der Rotationsachse). Diese Situation

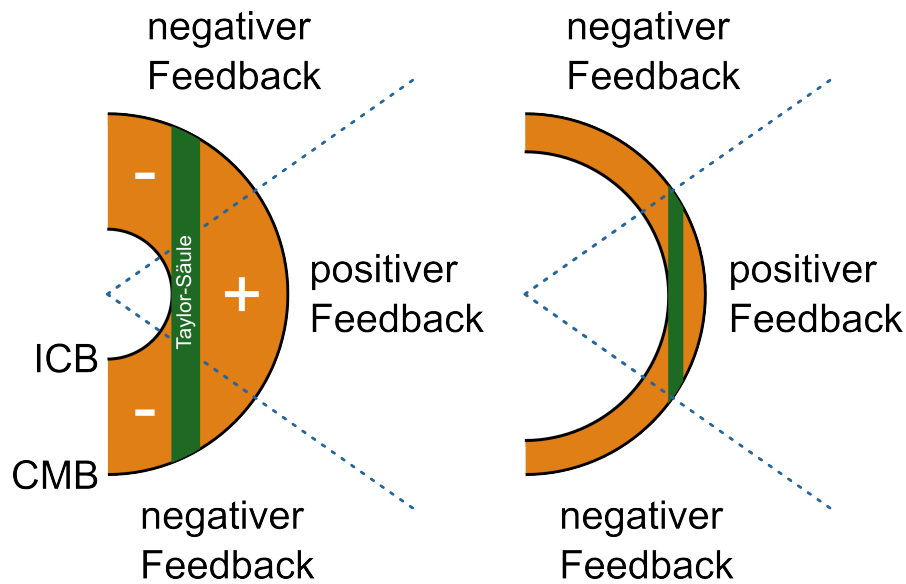


Abbildung 7.18: Bereiche der Dynamozone mit positivem und negativem Feedback. Gezeigt sind schematische Halb-Schnitte durch die Dynamozone (orange) berandet durch den inneren Kern (ICB) und Kern-Mantel-Grenze (CMB). In grün ist in etwa die Lage einer Taylorsäule am inneren Kernrand eingezeichnet. *Links*: Erdähnliches Verhältnis zwischen innerem Kern und Kern-Mantel-Grenze: $\chi = 0,35$. *Rechts*: Relativ großer innerer Kern: $\chi \approx 0,8$.

ist schematisch in Abbildung 7.18 gezeigt. In diesem Fall würden die Taylor-Säulen in einem Bereich des positiven Feedbacks liegen ($55,2^\circ \leq \theta \leq 124,8^\circ$). Bei einem Kernradius mit $\chi \approx 0,8$ stellt sich dann aber auch die Frage, ob sich ein dipoldominierter Dynamo ergibt (Heimpel et al. 2005, Stanley et al. 2005) beziehungsweise ob überhaupt noch eine ausreichende chemische Konvektion einstellen kann, da der eutektische Punkt wahrscheinlich bei $\chi = 0,7$ überschritten ist (Spohn et al. 2001). Interessant wäre zu überprüfen, ob sich bei einem positivem Feedback und einem unterkritischen *Quasi*-Dynamo (also eher einem magnetokonvektivem System) eine stabile Situation einstellt. Es ist vorstellbar, dass diese Situation auch beim abklingenden Ast der relativen Antwortfunktion existieren kann.

8 Erweiterung des Feedbackdynamo-Modells auf extrasolare Planeten und den jungen Merkur

Die Sonnenwindstärke bestimmt wesentlich die Amplitude des Feldes der Magnetosphäre und damit die Wirksamkeit des negativen Feedbacks auf den Dynamo. Der Sonnenwinddruck ist allerdings nicht zeitlich konstant, sondern nimmt mit dem Alter der Sonne stetig ab. Daher ist es interessant, den Feedbackmechanismus nicht nur bei einem konstanten dynamischen Sonnenwinddruck zu betrachten, sondern auch in die Vergangenheit des Sonnensystems zu blicken. Außerdem sind heutzutage eine Vielzahl von Exoplaneten bekannt, die ihre Bahn um Sterne ziehen, die sich in ihrem Massenauswurf von unserer jetzigen Sonne unterscheiden. Daher soll hier das Anwendungsgebiet des Feedbackdynamo-Modells erweitert werden, damit es auch für Merkur in der Vergangenheit sowie auf die Exoplaneten angewendet werden kann.

8.1 Sternentwicklungsmodell für die Sonne

Die Dichte und Geschwindigkeit des abströmenden Sternenwindes bestimmt den momentanen Massenverlust eines Sterns. Wood et al. (2002, 2005) und Wood (2006) schätzen auf indirekte Weise die Verlustraten von sonnenähnlichen Sternen in einem anderen Entwicklungsstadium als unsere Sonne. Dies erlaubt Rückschlüsse auf den Sonnenwinddruck in der Vergangenheit in unserem Sonnensystem. Der Massenverlust von *G*- und *K*-Hauptreihensternen kann durch Messungen von charakteristischen *Lyman- α* Absorptionslinien abgeschätzt werden. Diese werden von einer hochenergetischen, neutralen Wasserstoffansammlung erzeugt, die durch die Interaktion des Sternenwindes mit dem lokalen interstellaren Medium entsteht (Wood et al. 2002). Mit diesen Abschätzungen des Massenverlustes berechneten Griessmeier et al. (2004, 2007) die zeitliche Entwicklung der Sonnenwindgeschwindigkeit u und der Teilchenanzahldichte n beim Erdborbit ($r = 1 \text{ AU}$):

$$u(r = 1 \text{ AU}, t) = u_E(t) = u_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-0,43} \quad (8.1)$$

$$n(r = 1 \text{ AU}, t) = n_E(t) = n_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-1,86} . \quad (8.2)$$

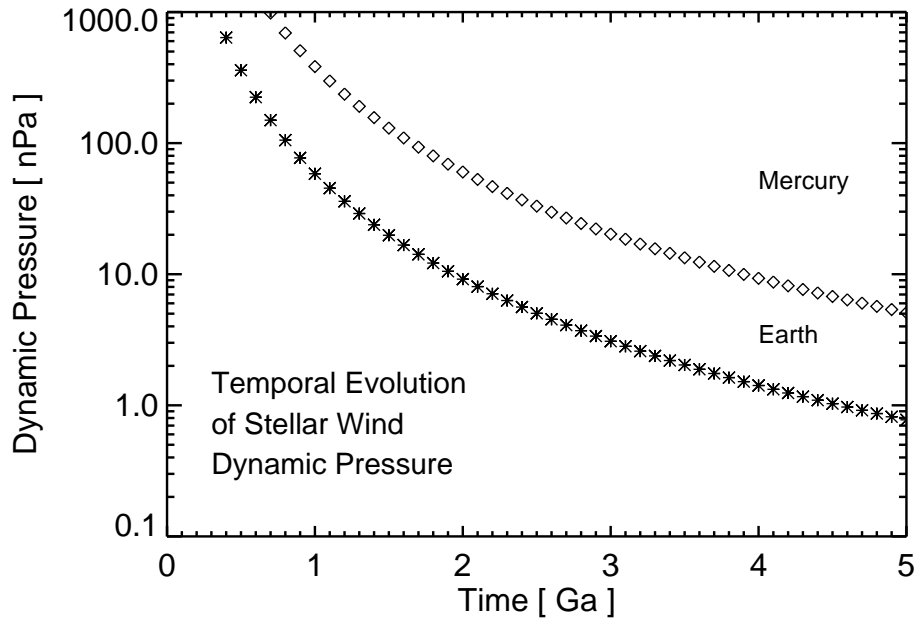


Abbildung 8.1: Zeitliche Entwicklung des Sonnenwinddrucks für den Merkur (Rauten) und die Erde (Sterne). Abbildung aus Heyner et al. (2012).

Hier steht t für die Zeit in Jahren, und $\tau = 2,56 \cdot 10^7$ a ist eine Zeitkonstante. Die Konstante für die Geschwindigkeit ist $u_0 \approx 4000$ km/s und für die Anzahldichte $n_0 \approx 10^{11} \text{ m}^{-3}$. Für andere Abstände zur Sonne wird angenommen, dass die Sonnenwindgeschwindigkeit räumlich relativ konstant ist, wenn Abstände betrachtet werden, die größer sind als der kritische Abstand in Parker-typischen Sternwinden (zum Beispiel Parker 1958, Holzer und Axford 1970). Den kritischen Abstand in unserem Sonnensystem geben Cravens (2004) mit $5,6R_{\odot}$ an (bei einer angenommenen Koronatemperatur von 10^6 K und einem dipolaren Abfall des Magnetfeldes).

Der Massenfluss muss kontinuierlich sein, also gilt für die Anzahldichte, dass sie mit dem Abstandsquadrat abnehmen muss:

$$n(r, t) = n_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-1,86} \frac{r_E^2}{r^2}, \quad (8.3)$$

wobei $r_E = 1\text{AU}$ gilt. Damit kann die zeitliche Entwicklung des inkompressiblen, gasdynamischen Sonnenwinddruckes $p_{\text{sw}}(r, t) = \frac{1}{2} m_p n(r, t) u^2(t)$ angegeben werden:

$$p_{\text{sw}}(r, t) = \frac{1}{2} m_p n_0 u_0^2 \frac{r_E^2}{r^2} \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-2,72} = p_0 \frac{r_E^2}{r^2} \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-2,72} \quad (8.4)$$

mit der Protonenmasse $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg und dem Druckkoeffizienten $p_0 \approx 1,3 \cdot 10^{-3}$ Pa. Die Entwicklung des Sonnenwinddrucks ist für einen mittleren Merkurabstand zur Sonne von 0,39 AU und für die Erdbahn in Abbildung 8.1 über die Zeit aufgetragen. Besonders in der Frühzeit (0 – 1 Milliarden Jahre nach der Entstehung des Sonnensystems) herrschte ein wesentlich stärkerer Sonnenwinddruck als heute. Dieser kann sogar bis zu 5000 nPa beim Merkur betragen. Wenn das Merkurmagnetfeld durch einen klassischen Dynamoprozess (also ohne einen signifikanten Einfluss des magnetosphärischen Feldes)

über die letzten 5 Milliarden Jahre erzeugt wurde, hat das wichtige Konsequenzen für die Ausbildung einer Magnetosphäre. Ein großer Sonnenwinddruck bedeutet, dass sich die Magnetopause bis zur Hälfte der Zeit bis heute gar nicht ausbilden konnte. Dadurch wäre der Planet also 2,5 Milliarden Jahre direkt dem Sonnenwind ausgesetzt, mit bedeutenden Folgen für die Entwicklung und Verwitterung der Oberfläche durch einfallende Sonnenwindpartikel. Im Vergleich dazu erreichte der Sonnenwind bei der Erde nie die Oberfläche oder die obere Atmosphäre. Selbst zu Zeiten einer Polumkehr mit geschwächtem Dipolfeld würde die Magnetopause nach Skalierungsgesetzen für den Magnetopausenabstand wie z.B. nach Glassmeier et al. (2004) nie in die Nähe der Oberfläche gelangen.

8.2 Feedbackdynamos in der Frühzeit des Merkur

Um das Verhalten des Feedbackdynamos unter den Bedingungen des frühen Sonnensystems zu studieren, wird in diesem Kapitel eine vereinfachte Form der magnetosphärischen Antwortfunktion der planaren Magnetopause verwendet. Hier wird vereinfachend

$$B_{\text{ext},0} := g_{1,\text{ext}}^0 = \sqrt{\mu_0 p_{\text{sw}}} \quad (8.5)$$

angenommen, da es hier in diesem Kapitel nur um eine qualitative Aussage geht. Der subsolare Magnetopausenabstand ist in dieser Vereinfachung durch

$$R_{\text{mp}} = R_M \sqrt[6]{\frac{B_{\text{dyn}}^2}{\mu_0 p_{\text{sw}}}} \quad (8.6)$$

gegeben. Der Übergang vom System ohne Magnetosphäre hin zum System mit einer Magnetosphäre ist durch den kritischen Wert des Dynamofeldes von $B_{\text{dyn}} = B_{\text{ext},0} = \sqrt{\mu_0 p_{\text{sw}}}$ gekennzeichnet, da bei dieser Dynamostärke nach Gleichung (8.6) gerade $R_{\text{mp}} = R_M$ gilt. Bei diesem Übergang muss wie üblich das externe Feld zu Null werden, da der Planet die Ausbildung des magnetosphärischen Stromsystems verhindert. Prinzipiell muss also hier die Antwortfunktion lauten:

$$B_{\text{ext}} = \begin{cases} B_{\text{ext},0} & B_{\text{dyn}} \geq B_{\text{ext},0} \\ 0 & B_{\text{dyn}} < B_{\text{ext},0} \end{cases} \quad (8.7)$$

Diese Form der Antwortfunktion kann aber noch verfeinert werden, da die Magnetopause eine endliche Dicke in der Größenordnung von einigen Gyroradien besitzt. Für Magnetopausenabstände von der Planetenoberfläche kleiner als die Magnetopausenbreite wird ein gleichmäßiger Übergang von einer voll entwickelten Magnetopause hin zu einer verschwindenden Stromschicht angenommen. Die innere Struktur der Magnetopause, also zum Beispiel die genaue Stromverteilung entlang der Normalenrichtung, ist noch nicht genau bekannt und Gegenstand aktueller Forschungen. Als Ansatz für die hier betrachtete Dämpfung wird eine symmetrische, exponentiell abfallende Stromschicht angenommen:

$$B_{\text{ext}} = \begin{cases} B_{\text{ext},0} \left(1 - \exp\left(-\frac{R_{\text{mp}} - R_p}{L}\right) \right) & B_{\text{dyn}} \geq B_{\text{ext},0} \\ 0 & B_{\text{dyn}} < B_{\text{ext},0} \end{cases} \quad (8.8)$$

wobei hier $L = \lambda r_g = \lambda m_p u_{\text{sw}} / e B_{\text{mp}}$ für die Dicke der Magnetopause (proportional zum Ionengyroradius r_g des Sternenwindes an der oberflächennahen Magnetopause) und e für die Elementarladung stehen. Für den terrestrischen Fall ist $\lambda \approx 10$ (z.B. Berchem und Russell 1982) ein typischer Wert für diese Proportionalitätskonstante. Weiterhin sei hier angenommen, dass der thermische Druck am Stagnationspunkt an der Magnetopause gleich dem dynamischen Druck im ungestörten Sonnenwind ist ($\kappa = 1$; vgl. Kapitel 3). Dies bedeutet, dass die thermische Geschwindigkeit der Ionen gleich der Sonnenwindgeschwindigkeit u_{sw} ist. Die beherrschende Größe in diesem Kapitel ist aber der Sonnenwinddruck, es gilt also, L in Abhängigkeit von p_{sw} zu stellen. In dieser stark vereinfachten Formulierung hängt das externe Feld sowohl von der Sternenwindgeschwindigkeit als auch vom dynamischen Druck ab (also im wesentlichen von der Protonenzahldichte). Nach den Ausdrücken (8.1) und (8.4) sind diese Größen abhängig vom Alter des Sternensystems. (8.1) und (8.4) erlauben es, über die Eliminierung der Zeit t den folgenden Zusammenhang

$$u_{\text{sw}} = u_0 \left(\frac{1}{p_0} \frac{r^2}{r_E^2} \right)^{0,158} p_{\text{sw}}^{0,158} , \quad (8.9)$$

und letztlich den Ausdruck

$$L = \nu p_{\text{sw}}^{-0,342} . \quad (8.10)$$

aufzustellen. Für den mittleren Merkurabstand zur Sonne von $r = 0,39$ AU wäre $\nu \approx 395 \text{ mPa}^{0,342}$.

Das Verhältnis des externen zum internen Feld $B_{\text{ext}}/B_{\text{dyn}}$ ist die bedeutende Größe für die weiteren Überlegungen, da sie den Bereich von Dynamozaehlen (also magnetischen Reynoldszahlen) bestimmt, für die ein stabiler Feedbackdynamo existieren kann. Für verschiedene Sternenwinddrücke ist das relative externe Feld in Abhängigkeit vom internen Feld in Abb. 8.2 gezeigt. Als Dynamomodell wird hier das schon in Kapitel 6.4 behandelte kinematische $\alpha\Omega$ -Modell benutzt. Stationäre Lösungen sind durch

$$\frac{P - P_{\text{crit}}}{P} = \frac{B_{\text{ext}}}{B_{\text{dyn}}} \quad (8.11)$$

mit der kritischen Dynamozaahl P_{crit} gegeben. Ohne das externe Feld oder andere *Quenching*-Mechanismen zerfallen (wachsen) Dynamos mit einer kleineren (größeren) Dynamozaahl P als der kritischen. Mit $P = P_{\text{crit}}$ erhält man einen stabilen Dynamo. Mit dem externen Feld wird diese Klassifizierung verändert, und die Entwicklung des Dynamos hängt von der relativen Antwortfunktion und der Startamplitude ab. Wie in Kapitel 6.4 dargestellt, kann mit einem stärkeren externen Feld der Bereich für stabile Feedbackdynamos ausgeweitet werden. Es gilt also nun, je nach momentanen Sternenwinddruck die maximale Dynamozaahl $[P/P_{\text{crit}}]_{\text{max}}$ zu finden. Aus der Beziehung (8.11) kann der Ausdruck für die maximale Dynamozaahl

$$\left[\frac{P}{P_{\text{crit}}} \right]_{\text{max}} = \frac{1}{1 - \left[\frac{B_{\text{ext}}(p_{\text{sw}}, B_{\text{dyn}})}{B_{\text{dyn}}} \right]_{\text{max}}} \quad (8.12)$$

gefunden werden. Das Maximum der relativen Antwortfunktion kann numerisch-iterativ ermittelt werden. Zwischen $P/P_{\text{crit}} = 1$ und dieser maximalen Dynamozaahl kann ein stabiler Feedbackdynamo existieren. Diese Regime sind in Abbildung 8.3 dargestellt. Je

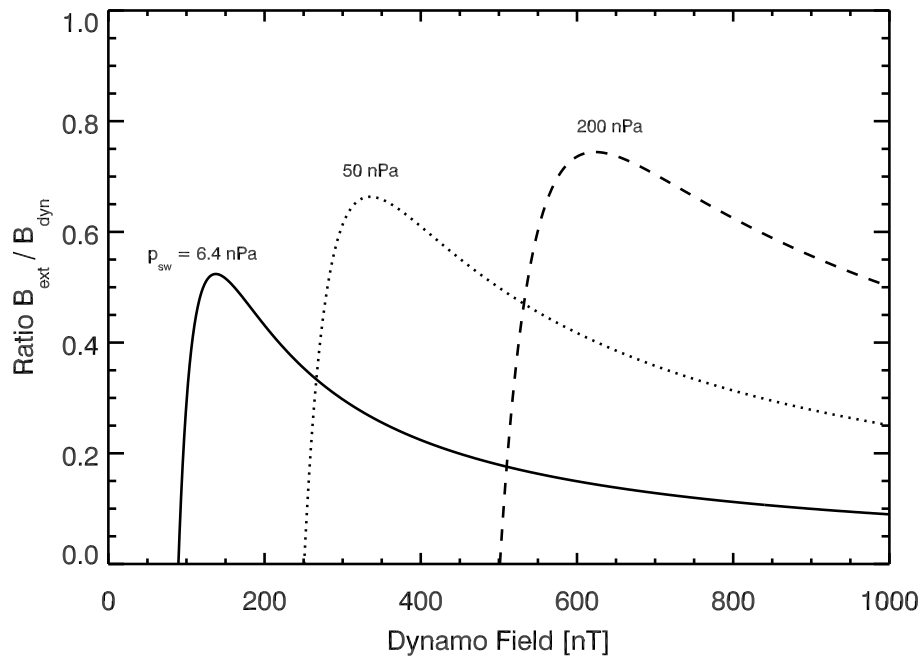


Abbildung 8.2: Die relative Antwortfunktion für drei verschiedene Sternwinddrücke für einen Planeten so nah am Mutterstern wie der Merkur. Die Magnetopause und damit das externe Feld entsteht erst wenn der Dynamo eine bestimmte Stärke erreicht hat. Diese Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Abbildung aus Heyner et al. (2012).

stärker der stellare Wind ist, desto größer ist der Bereich der Dynamoszahlen, für die ein stabiler Feedbackdynamo existieren kann. Hier sei noch betont, dass die bisherige Diskussion auf dipoldominierte Dynamos abzielt. Dynamos mit einem dominierenden Quadrupol sind hier nicht betrachtet worden.

Wie in Abbildung 8.4 dargestellt, nimmt auch der zulässige Bereich für das Oberflächenfeld eines stabilen Feedbackdynamos mit dem Betrag des stellaren Druckes zu. Zusammengefasst nimmt die Wahrscheinlichkeit, einen durch den Sternwind stabilisierten, schwachen Dynamo zu finden, mit dem Abstand zum Mutterstern und mit dessen Alter ab.

8.3 Falsifizierungsmöglichkeiten bei Exoplaneten

Die MESSENGER-Mission der NASA (Solomon et al. 2007) vermisst zur Zeit das Merkurmagnetfeld und die Ankunft der BepiColombo-Mission (Benkhoff et al. 2010) ist für 2022 geplant. Damit sollte sich ein genaues Bild von der geometrischen Struktur des planetaren Magnetfeldes ergeben. Bei Exoplaneten gestaltet sich die magnetische Charakterisierung schwieriger. Es stellt sich also die Frage, wie man einen Feedbackdynamo über die großen Distanzen hinweg nachweisen könnte. Verschiedene Skalierungsgesetze wie Grießmeier et al. (2005) sowie Christensen und Aubert (2006) für planetare Magnetfelder können Auskunft über das zu erwartende Magnetfeld eines Exoplaneten geben. Die Skalierungsgesetze basieren auf Annahmen über das zu erwartende Kräftegleichgewicht im Kern, oder den zur Verfügung stehenden Auftriebsfluss. In die Skalierungsgesetze gehen

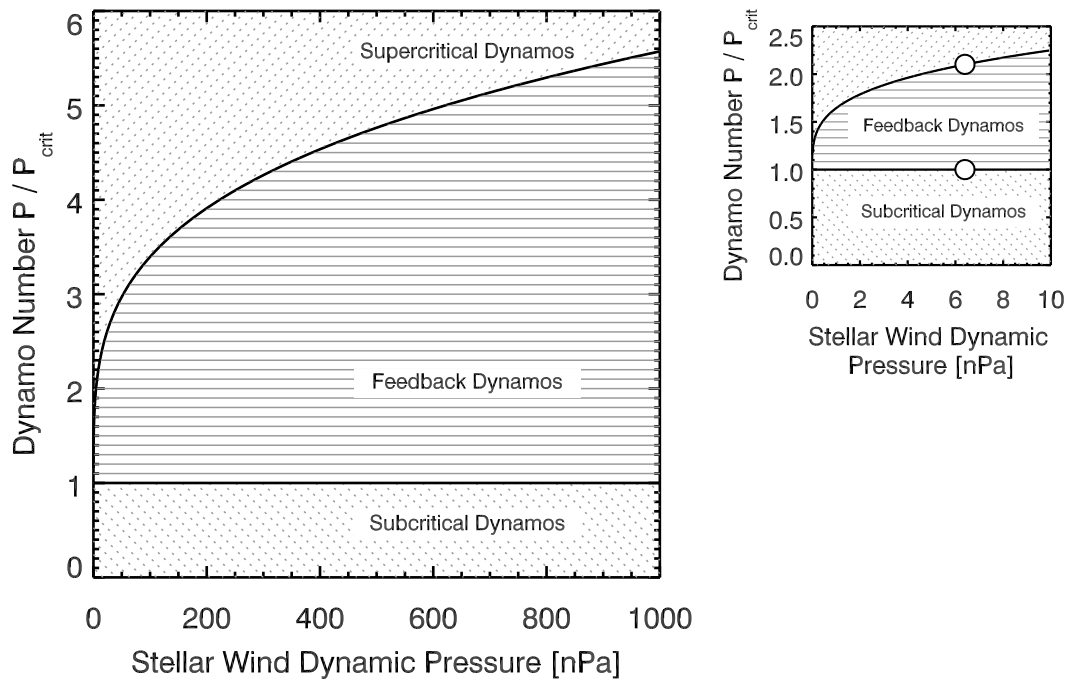


Abbildung 8.3: *Links*: Feedbackdynamo-Regime in Abhängigkeit von der normalisierten Dynamozahl und des Sternenwinddrucks. Ohne Sternenwind ist nur ein Dynamo mit $P/P_{\text{crit}} = 1$ stabil. Für $P/P_{\text{crit}} < 1$ ist das System stets instabil und der Dynamo zerfällt. Für $P/P_{\text{crit}} > 1$ existieren stabile Feedbackdynamos bis zu einer Regimegrenze (obere durchgezogene Linie), ab welcher der Dynamo zu stark ist und nicht durch den Feedback stabilisiert werden kann. *Rechts*: Vergrößerung der gleichen Abbildung für kleine Sternenwinddrücke. Die schwarzen Kreise markieren die heutige Merkursituation. Abbildung aus Heyner et al. (2012).

dann Parameter, wie die Rotationsgeschwindigkeit, Kernradius, Kerndichte, Kernleitfähigkeit und Kerntemperatur ein. Wenn nun, entgegen den Voraussagen, basierend auf den Skalierungsgesetzen, ein schwaches Magnetfeld eines Exoplaneten detektiert wird, ist es angebracht zu überprüfen, ob der Sternenwind für die anormale Schwächung des Magnetfeldes verantwortlich sein kann. Umgekehrt kann ein Feedbackdynamo ausgeschlossen werden, wenn das beobachtete Magnetfeld den Skalierungsgesetzen entspricht.

Für Planeten in Reichweite von Satelliten kann die Information über das derzeitige Magnetfeld direkt gewonnen werden. Für Planeten, von denen Meteoriten auf die Erde gelangen, können aktuelle beziehungsweise paläomagnetische Informationen aus den magnetischen Mineralien, welche die Feldinformation aus der Vergangenheit speichern, gewonnen werden (Tarduno et al. 2010). Für Exoplaneten ist man heutzutage auf Fernerkundungsmethoden angewiesen. Dazu existieren bereits mehrere Methoden, die hier vorgestellt werden.

Eingefangene Elektronen in planetaren Strahlungsgürteln in der Magnetosphäre können Pulse von Radiostrahlung freisetzen, die auf die Zyklotron-Maser-Instabilität als Quelle hindeuten (Zarka 2007). Die Stärke dieser Pulse skaliert mit der magnetischen Feldstärke des Planeten (Zarka 2007). Aber auf Grund der großen Entfernung können mit dieser Methode nur exoplanetare Magnetfelder mit jupiterähnlicher Stärke nachgewiesen wer-

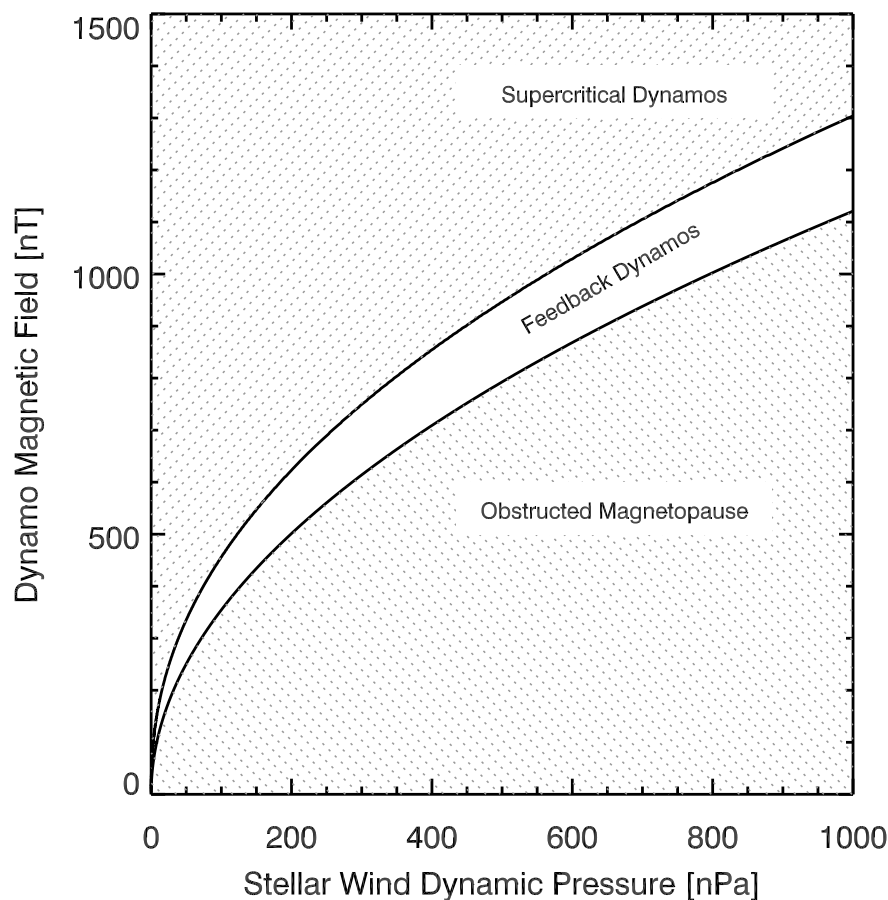


Abbildung 8.4: Dynamomagnetfeld an der Planetenoberfläche in Abhängigkeit des stellaren Druckes für einen Planeten mit der Merkur-Sonnen-Distanz zum Mutterstern. Die untere Linie markiert den Bereich, bei dem das Dynamomagnetfeld nicht ausreicht, um eine Magnetosphäre auszubilden. Im Anschluss existiert ein Bereich, bei dem ein stabiler Feedbackdynamo existieren kann. Wenn das interne Feld zu stark und der stellare Wind relativ dazu zu schwach ist, reicht das externe Feld nicht für eine Sättigung des Dynamoprozesses und der Dynamo wächst exponentiell an. Abbildung aus Heyner et al. (2012).

den. Mit dieser Methode können daher keine schwachen Magnetfelder wie beim Merkur gemessen werden. Der Sternenwind müsste sehr stark sein, um einen solchen Dynamo zu beeinflussen.

Die Analyse von stellaren Leuchtkraftkurven während eines planetaren Transits eröffnet eine neue, viel versprechende Methode zur Fernbestimmung von Magnetfeldern von Planeten, die sich sehr nah an ihrem Mutterstern befinden. Diese Planeten sind tendenziell einem starken Sternenwind ausgesetzt und daher ist ein starkes, externes, magnetosphärisches Feld zu erwarten. Damit steigt hier die Wahrscheinlichkeit, einen planetaren Dynamo unter dem limitierenden Einfluss des Feedbackmechanismus zu finden. Fossati et al. (2010) berichteten von einer Asynchronität zwischen dem Abfall der Leuchtkraft im sichtbaren und dem Abfall der Leuchtkraft im nahen UV Spektralbereich (N-UV). Dies wurde zunächst für den Planeten WASP-12b in einem Abstand von 0,023 AU zum Stern WASP-12 nachgewiesen. Die Asynchronität wurde von Vidotto et al. (2010) als Folge der

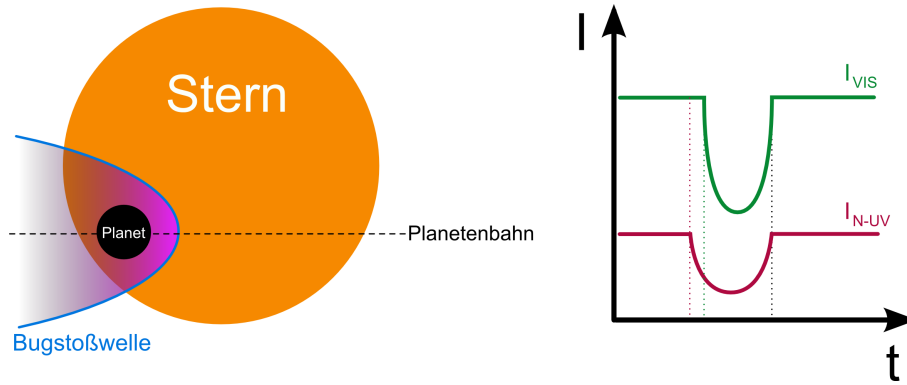


Abbildung 8.5: *Links*: Modellvorstellung eines planetaren Transits in der Sichtlinie zwischen der Erde und einem Stern. Die Bugstoßwelle ist in blau und die *Magnetosheath* in violett dargestellt. *Rechts*: Skizzierung der Leuchtkraftkurven. Die Leuchtkraft im sichtbaren Spektralbereich (grün) wird auf Grund der größeren *Magnetosheath* später schwächer als die Leuchtkraft im nahen UV-Bereich (violett).

Lichtabsorption der *Magnetosheath* gedeutet. Bei der Erde ist die Symmetrieachse der Bugstoßwelle ungefähr parallel zu der Verbindungsline zwischen der Erde und der Sonne. Es stellt sich also die Frage, warum man diesen Versatz bei den Transitbeobachtungen von Exoplaneten erhält. Wenn ein Exoplanet sich sehr nahe an seinem Stern befindet, ist seine Umlaufgeschwindigkeit sehr hoch. Wenn sich der Planet auf einer Kreisbahn mit dem Radius R um seinen Stern mit der Masse M_s befindet, ist die Orbitalgeschwindigkeit v durch

$$v = \sqrt{\frac{GM_s}{R}} \quad (8.13)$$

mit der Gravitationskonstanten G gegeben. Für den Exoplaneten WASP-12b ($M_s = 1,35M_\odot$, $R = 0,023$ AU) gibt Vidotto et al. (2010) eine Orbitalgeschwindigkeit von 230 km s^{-1} an. Für die Ausbildung einer Bugstoßwelle muss dies mit der magneto-sonischen Geschwindigkeit

$$c_{\text{ms}} = \sqrt{c_s^2 + v_A^2} \quad (8.14)$$

verglichen werden (z.B. Baumjohann und Treumann 1996), wobei $c_s = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m_p}}$ die Schallgeschwindigkeit und $v_A = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$ die Alfvén-Geschwindigkeit bezeichnen. Aus dem Ruhesystem des Planeten betrachtet, kann dies dazu führen, dass der Sternenwind (anti-)parallel zur Orbitrichtung fließt. Dies hat zur Folge, dass bei einem Transit die *Magnetosheath* zeitlich vor dem Planeten den Stern bedeckt, denn der erhitzte und verdichtete Sternenwind absorbiert in der Magnetosheath im nah-ultravioletten Spektralbereich. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 8.5 skizziert.

Nahe am Stern korotiert das Sternenplasma mit dem Stern auf Grund des starken, stellaren Magnetfeldes. Das hat zur Folge, dass sich, je nach Abstand des Planeten zum Stern, die Ausrichtung der Bugstoßwelle ändert wie in Abbildung 8.6 dargestellt. Ist der Abstand des Planeten kleiner (größer) als der Korotationsradius

$$r_{\text{cor}} = \sqrt[3]{\frac{GM_s \tau^2}{4\pi^2}} \quad (8.15)$$

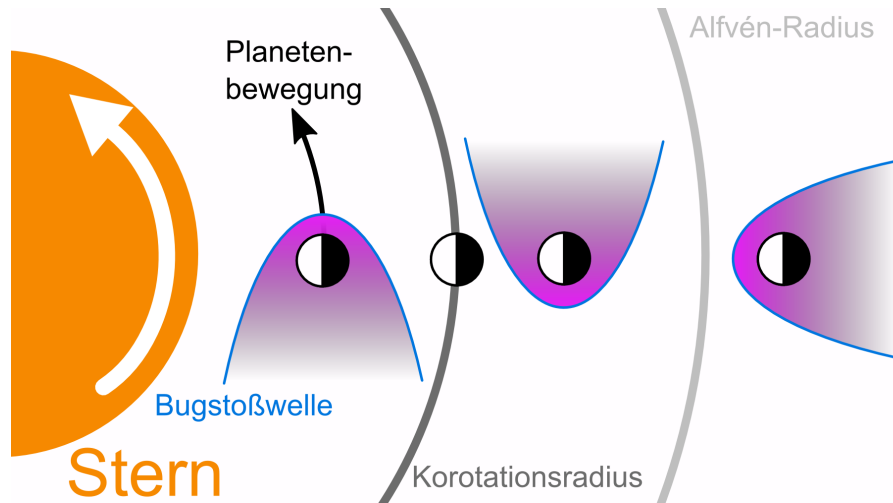


Abbildung 8.6: Ausrichtung der Bugstoßwelle je nach Abstand des Planeten zu seinem Stern in der Ekliptikebene. Wenn der Planet sich innerhalb (außerhalb) des Korotationsradius befindet, ist der Planet schneller (langsamer) als das umgebende Plasma. Genau an der Stelle des Korotationsradius ruht das Plasma und es bildet sich keine Bugstoßwelle aus. Diese Grenze ist aber wahrscheinlich in der Realität nicht scharf, sondern radial weiter ausgedehnt, da die Bugstoßwelle schon beim Unterschreiten der magnetosonischen Geschwindigkeit verschwindet.

zum Stern mit der Rotationsperiode τ , so erfolgt der Transit im N-UV Spektralbereich vor (nach) dem Transit im sichtbaren Licht. Ist der Abstand genau gleich dem Korotationsradius, so gibt es keine Relativbewegung des Plasmas und des Planeten und keine Bugstoßwelle entsteht. Das Sternenplasma korotiert nur bis zum sogenannten Alfvén-Radius R_A . Darüber hinaus ist die Sternenwindströmung so stark, dass sie die Lorentzkraft überwinden kann. Shore (2007) schätzen für die Sonne einen Alfvén-Radius von $R_A = 16R_\odot$ ab (R_\odot steht für den Sonnenradius). Dieser Radius muss nicht zwingend außerhalb des Korotationsradius liegen, wie in Abbildung 8.6 dargestellt, sondern kann auch innerhalb dessen liegen. Bei der Sonne liegt zum Beispiel der Korotationsradius nach Gleichung (8.15) bei $r_{\text{cor}} = 18,2R_\odot$. In dieser Situation tragen sowohl die Orbitalgeschwindigkeit des Planeten und die radiale Abströmung des Sternenwindes zur Gesamtgeschwindigkeit bei, was die Ausrichtung der Bugstoßwelle wiederum verändert. Diese Situation ist in Abbildung 8.7 skizziert. Aus der Lage der Bugstoßwelle R_{bs} und dem Dichtesprung $n_{\text{sw}}/n_{\text{bs}}$ (maximal ist $n_{\text{sw}}/n_{\text{bs}} \approx 1/4$) an der selben kann man über die Gleichung

$$R_{\text{bs}} = \left(1 + 1,1 \frac{n_{\text{sw}}}{n_{\text{bs}}}\right) R_{\text{mp}} \quad (8.16)$$

die Ausdehnung der Magnetopause R_{mp} gewinnen. Maximal ist dieses Verhältnis $R_{\text{bs}} = 1,3R_{\text{mp}}$ (Baumjohann und Treumann 1996). Mit dem dynamischen Sonnenwinddruck und einem Magnetosphärenmodell ergibt sich dann die Dipolstärke des Planeten. So berechnen Vidotto et al. (2010) ein oberes Limit von 2,4 mT für das Oberflächenfeld vom Exoplaneten WASP-12b.

Was würde bei einem solchen jupiter-ähnlichen Planeten passieren, wenn der Zentralstern die Sonne wäre? In einer Entfernung von $r = 16R_\odot$ (dem Alfvén-Radius) ist für

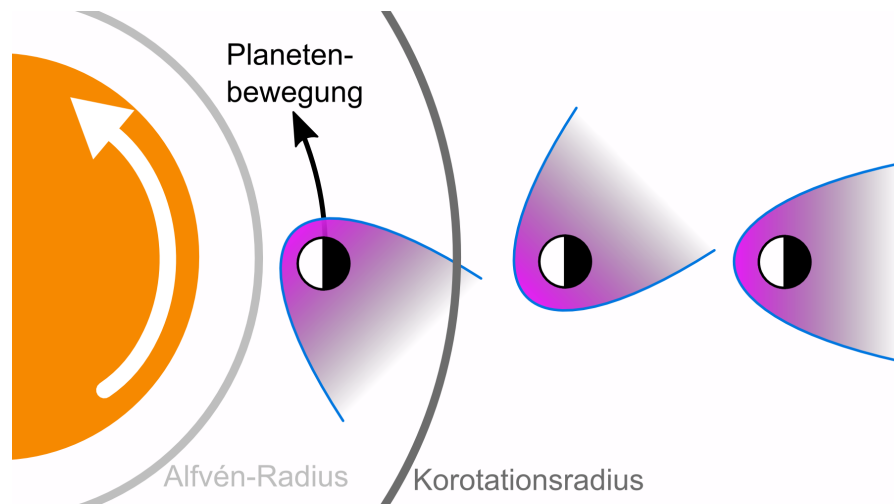


Abbildung 8.7: Lage der Bugstoßwelle bei einem Stern mit einem Alfvén-Radius kleiner als der Korotationsradius. Außerhalb des Alfvén-Radius dominiert immer mehr der Sternwind und nicht mehr die Orbitalbewegung des Planeten, so dass die Symmetrieachse der Bugstoßwelle mit wachsendem Abstand immer mehr radial ausgerichtet wird. Der Korotationsradius verliert hier die Bedeutung für das Sternenplasma.

die Sonne bei einer Temperatur von $T \approx 10^6$ K, einer Anzahldichte von $n \approx 10^4 \text{ cm}^{-3}$ und einem Magnetfeld von $B \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ T}$ (wenn ein Oberflächenfeld von 10^{-4} nT und ein dipolarer Abfall angenommen wird) zu erwarten. Unter der Annahme von $\gamma = 5/3$ folgen dann, $c_s = 1,17 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ und $v_A = 4,37 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. Eine Orbitalgeschwindigkeit von 230 km s^{-1} wie bei WASP-12b würde also hier nicht ausreichen, um eine Bugstoßwelle zu erzeugen. Stattdessen würde der stellare Wind graduell vor der Magnetopause angestaut und umgeleitet werden¹. Auch in diesem Fall wäre eine frühere Absorption im N-UV Spektralbereich zu erwarten. Lai et al. (2010) halten dieses Szenario für WASP-12b für wahrscheinlich.

Es ist nicht ganz klar, ob ein abnorm schwaches Magnetfeld mit dieser Methode detektierbar und ob eine Bugstoßwelle parallel zur Sichtlinie auch nachweisbar wäre. Wenn man aus dem Profil des Abfalls der Leuchtkraft im N-UV die Lage und Ausrichtung der Bugstoßwelle bzw. der Magnetopause direkt bestimmen könnte, würde das diese Fernerkundungsmethode verbessern.

Neben der Messung des planetaren Magnetfeldes gibt es noch eine weitere Möglichkeit einen eventuellen Feedbackdynamo nachzuweisen. Wenn das planetare Magnetfeld eines Gesteinsplaneten so durch den Feedback-Effekt geschwächt ist, dass die Magnetopause sich sehr nah am Planeten befindet, so kommt es auf Grund der Schwankungen im Sternwind (wie beim Sonnenwind, siehe zum Beispiel Russell (2001)) öfter dazu, dass die Magnetopause bis auf die Planetenoberfläche gedrückt wird. Wenn aber der junge Merkur oder ein betrachteter Exoplanet eine Atmosphäre aufweist, würde der Sternwind durch eine induzierte Magnetosphäre abgelenkt werden - eine Situation wie bei der Venus. Ohne eine dichte Atmosphäre ist die Wechselwirkung ähnlich wie bei einem Asteroiden (Wiehle et al. 2011). Es kommt zu einer Zerstäubung durch den Ionenbeschuss vom

¹Bei einer submagnetosonischen Anströmung entstehen sog. Alfvénflügel.

Sternenwind. Dabei werden Teilchen (schwere Elemente) von der Oberfläche freigesetzt und diese können dann durch die Strahlung vom Stern ionisiert werden. Diese geladenen Teilchen werden dann in den Sternenwind integriert (engl. *pick-up*) und entsprechend beschleunigt. Diese Teilchen bilden dann einen Schwerionenschweif, der auch aus der Ferne beobachtbar ist (Mura et al. 2011). Ein wahrscheinlicher Kandidat für das schwere Element wäre Natrium wie es auch schon beim Merkur (z.B. McClintock et al. 2008) oder beim Mond (Matta et al. 2009) beobachtet wurde. Andere Quellen für das *sputtering* sind auch Meteoriteneinschläge oder photo-stimulierte Desorption. Dies macht das Erscheinen eines Schwerionenschweifs im Zusammenhang mit einem Feedbackdynamo uneindeutig. Insgesamt würde ein unerwartet schwaches Magnetfeld als Ergebnis aus einer anderen Analyseverfahren zusammen mit dem Nachweis eines Schwerionenschweifs einen durch den Feedbackmechanismus geschwächten Dynamo wahrscheinlicher erscheinen lassen.

8.4 Auswirkungen des schwachen Magnetfeldes auf die Habitabilität eines Planeten

Hat ein schwaches Oberflächenmagnetfeld Einfluss auf die Habitabilität? Sie ist ein Maß für die Bewohnbarkeit eines Planeten und hängt maßgeblich davon ab, ob flüssiges Wasser an der Oberfläche über geologische Zeitskalen gehalten werden kann (Ollivier et al. 2009). Diese Bedingung allein ist aber wahrscheinlich nicht hinreichend für die Ausbildung von Leben, wie wir es auf der Erde kennen. In Abbildung 8.8 sind die Prozessketten dargestellt wie das Magnetfeld den Verlust von Wasser und die UV-B-Strahlung beeinflussen kann. Als habitable Zone wird der Bereich in einem Planetensystem bezeichnet, in dem flüssiges Wasser auf der Oberfläche von Planeten erhalten werden kann (Ollivier et al. 2009). Für die Entstehung und Entwicklung von Leben sollte außerdem die UV-Belastung nicht zu hoch sein. Ein schwaches planetares Magnetfeld kann durch die oben beschriebenen Einflüsse dazu beitragen, die Breite dieser Zone zu verringern.

Ein starker Sternenwind von jungen Sternen erhöht die Wahrscheinlichkeit, dass ein Dynamo in einem schwachen Zustand eingefangen wird. Ein schwaches Magnetfeld in Kombination mit einem starken Sternenwind hat drei wichtige Konsequenzen.

Erstens ist der Magnetopausenabstand sehr gering (Glassmeier et al. 2004). So können ionisierte, atmosphärische Teilchen leichter vom Sonnenwind eingefangen und abtransportiert werden. Die nahe Magnetopause kann auch eine Verstärkung der Ablösung von Plasmablasen durch die Kelvin-Helmholtz-Instabilität hervorrufen. Bei der Venus berichten Edberg et al. (2011) von einer gestiegenen atmosphärischen Entweichrate während der Durchgänge schneller Plasmaströme in Folge koronaler Massenauswürfe und *corotating interaction regions* auf Grund einer erhöhten Rekonnexionsrate, *pick-up*-Rate und kräftigeren Kelvin-Helmholtz Instabilitäten an den Magnetopausenflanken.

Zweitens lässt die Abschirmung gegen kosmische Teilchenstrahlung bei einem schwachen Magnetfeld nach (Stadelmann et al. 2010) – ein größerer Anteil der Teilchen kann tief in die Atmosphäre eindringen und die Fläche, auf die die Teilchen einschlagen können, ist vergrößert. Einige Konsequenzen der weniger effektiven Abschirmung werden von Sinnhuber et al. (2003), Griebmeier et al. (2005) und Glassmeier et al. (2009) diskutiert: Der verbesserte Zugang von energetischen Partikeln solaren oder galaktischen Ursprungs kann eine erhöhte Produktion von NO_x und HO_x in der Atmosphäre hervor-

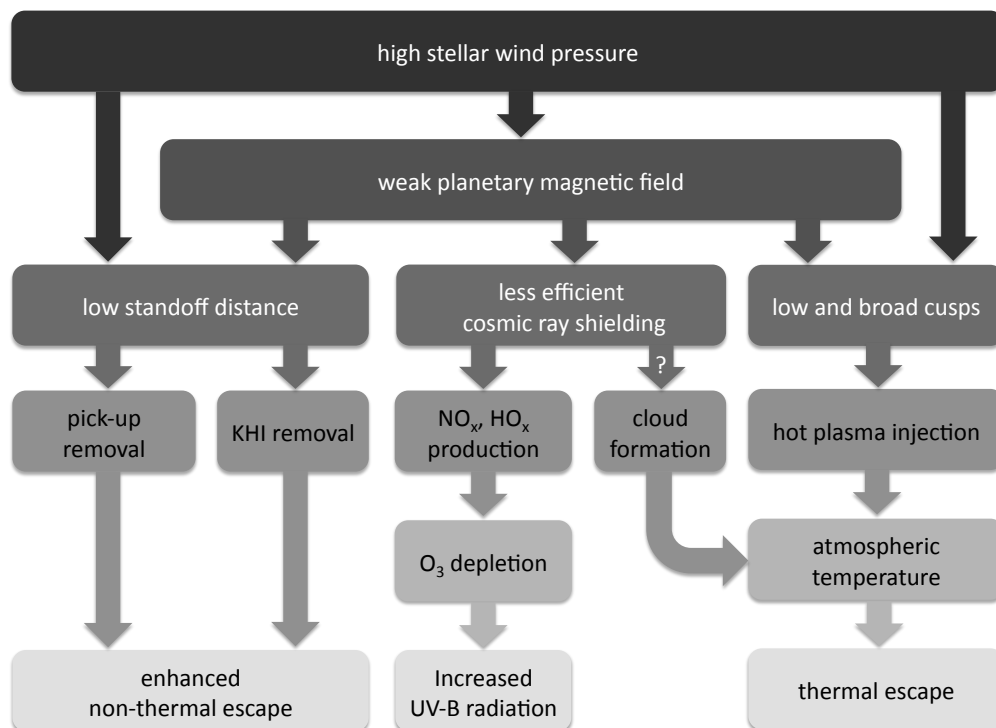


Abbildung 8.8: Prozessketten wie ein schwaches Magnetfeld (hervorgerufen durch den magnetosphärischen Feedback) zusammen mit einem hohen Sonnenwinddruck den atmosphärischen Verlust und die Habitabilität eines Planeten beeinflussen kann. KHI steht für Kelvin-Helmholtz Instabilität. Abbildung aus Heyner et al. (2012).

rufen. Dies führt zu einer Abnahme von Ozon und in Folge dessen zu einer höheren UV-B-Strahlenbelastung erzeugt. Der Effekt, dass kosmische Teilchenstrahlung die Wolkenbildung und dadurch die planetare Albedo und Infrarotrückstrahlung zur Planetenoberfläche beeinflusst, wird noch kontrovers diskutiert (zum Beispiel Kristjánsson et al. 2004, Svensmark 2006).

Drittens konnte nachgewiesen werden, dass sich die *cusps* in der Magnetopause bei einem erhöhten Sonnenwinddruck aufweiten (Zhou et al. 2000, Vogt und Glassmeier 2001). Mit einer oberflächennahen Magnetopause als Konsequenz des schwachen Magnetfeldes können Sonnenwindplasma und Plasmawellen leichter in die Magnetosphäre eindringen und die oberen Schichten der Atmosphäre beziehungsweise Ionosphäre aufheizen. Die Dissipation von Plasmawellen durch Joulsche Wärmeproduktion und Elektronenniedererschläge führt zu einer Aufheizung der Atmosphäre neben der EUV-Strahlung von der Sonne (Glassmeier et al. 1984, Lathuillere et al. 1986). Basierend auf einer Modellstudie von Knipp et al. (2005) über die verschiedenen Leistungseinträge von der Sonne, beträgt der Anteil der Joulschen Wärmeproduktion rund 20 % von der gesamten Wärmeproduktion während ruhiger Zeiten und erreicht das Niveau der EUV-Leistung zu Zeiten von schweren magnetischen Stürmen. Dieses Resultat legt den Schluss nahe, dass die Atmosphäre stärker aufgeheizt wird wenn das planetare Magnetfeld schwach und der Sonnenwind stark ist. Diese Aufheizung hat wiederum zur Folge, dass der thermische Verlust

8.4 Auswirkungen des schwachen Magnetfeldes auf die Habitabilität eines Planeten

von Wasserstoff oder anderen flüchtigen Gasen angeregt wird. Dadurch kann sich der Wassergehalt der Atmosphäre und damit des ganzen Planeten verringern.

9 Magnetfeldmessdaten der Messenger-Mission

Die MESSENGER-Mission befindet sich zur Zeit im Orbit um Merkur und vermisst unter anderem das Magnetfeld. Die geometrische Struktur des planetaren Magnetfeldes kann mit den Vorhersagen basierend auf den Dynamomodellen verglichen werden. Da die meisten Dynamomodelle eine spezielle innere Struktur des Merkur voraussetzen, kann diese durch die Magnetfeldmessung eingegrenzt beziehungsweise falsifiziert werden. In diesem Kapitel werden die aktuellen Analyseergebnisse der MESSENGER-Mission bezüglich des internen Magnetfeldspektrum kritisch untersucht. Weiterhin wird das Spektrum mit den Vorhersagen aus den bisher vorgeschlagenen Dynamomodellen einschließlich des Feedbackdynamos verglichen.

9.1 Der Offsetdipol des Merkur

Bereits nach dem ersten Nachweis des Merkurmagnetfeldes passten Ness et al. (1974) einen Dipol an die Messdaten an, der signifikant nach Norden verschoben ($0,47R_M$) war. Dieser Versatz hat Konsequenzen für die Magnetosphärenphysik als auch für die Dynamotheorie. So rückt durch den Versatz die südliche *Cusp*-Region näher an den Planeten heran. Dadurch können *Magnetosheath*-Teilchen leichter bis zur Planetenoberfläche vordringen. Für die Dynamotheorie ist es eine Herausforderung ein Dynamomodell zu entwickeln, das einen hemisphärischen Dynamo hervorbringt, da normalerweise keine Präferenz zum Beispiel der Konvektion für eine Hemisphäre zu erwarten ist.

Mit der MESSENGER-Sonde im Orbit, berechneten Alexeev et al. (2010) und Anderson et al. (2012) einen etwas kleineren Versatz als Ness et al. (1974) von etwa 0,2 planetaren Radien. Dabei lagen der neueren Analyse weitaus mehr Messdaten zu Grunde. Anderson et al. (2012) verwendeten sowohl den Ort des magnetischen Äquators als auch eine Anpassung der Messdaten in der Magnetosphäre, um den Dipolversatz zu ermitteln.

Es stellt sich die Frage, ob die Ermittlung des Offsets vielleicht fehlgeleitet ist, da der MESSENGER-Datensatz örtlich begrenzt ist. Alternativ zu dem Offset-Dipol könnte eine Kombination von einem zentrierten Dipol mit einem Quadrupol das gemessene asymmetrische Feld erklären.

Der um die Distanz d verschobene Dipol der Stärke G_1^0 kann durch eine Reihe von zentrierten Multipolen über die Koeffizienten

$$g_{l,\text{int}}^0 = G_1^0 l \left(\frac{d}{R_M} \right)^{l-1} . \quad (9.1)$$

exakt dargestellt werden (Alexeev et al. 2010). Für einen Versatz von $d/R_M = 0,196$ und ein Dipolfeld von $G_1^0 = -190 \text{ nT}$ (Anderson et al. 2012) folgt also die Reihe

$$\begin{aligned} g_{1,\text{int}}^0 &= G_1^0 &= -190 \text{ nT} \\ g_{2,\text{int}}^0 &= 0,392 G_1^0 &= -74,5 \text{ nT} \\ g_{3,\text{int}}^0 &= 0,115 G_1^0 &= -21,8 \text{ nT} \\ g_{4,\text{int}}^0 &= 0,0301 G_1^0 &= -5,72 \text{ nT} \end{aligned} \quad (9.2)$$

Anderson et al. (2012) berichten die angepassten Koeffizienten der höheren Multipole:

$$\begin{aligned} g_{2,\text{int}}^0 &= -74,6 \pm 4,0 \text{ nT} \\ g_{3,\text{int}}^0 &= -22,0 \pm 1,3 \text{ nT} \\ g_{4,\text{int}}^0 &= -5,7 \pm 0,2 \text{ nT} \end{aligned} \quad (9.3)$$

Die Koeffizienten mit $m \neq 0$ sind alle kleiner als ein Nanotesla. Die Koeffizienten mit $m = 0$ entsprechen ziemlich genau den zuvor gezeigten Koeffizienten.

Der Dipolversatz verschiebt den magnetischen Äquator und auch die Magnetopause nach Norden. Anderson et al. (2012) konnten zeigen, dass der magnetische Äquator tatsächlich nach Norden versetzt ist. Allerdings detektierte die MESSENGER-Sonde den magnetischen Äquator in der Nähe zum Planeten nur innerhalb eines schmalen Bereichs oberhalb von ca. 3100 km (bis etwa 4000 km). Um einen einzelnen versetzten Dipol von einem zentrierten Dipol und einem Quadrupol mittels der Äquatormethode zu unterscheiden, müsste man aber eher einen größeren Bereich abdecken.

Beim magnetischen Äquator ist gerade

$$B_\rho = B_r \sin \theta + B_\theta \cos \theta = 0 \quad (9.4)$$

Aus der Potentialentwicklung nach Gleichung (2.9) lässt sich für diese Komponente schreiben:

$$B_\rho = 3 \left(\frac{R_M}{r} \right)^3 \sin \theta \left[g_1^0 \cos \theta + \frac{R_M}{r} g_2^0 (2,5 \cos^2 \theta - 0,5) \right] \quad (9.5)$$

und die Äquatorbedingung Gleichung (9.4) wird zu

$$0 = \cos \theta + \frac{R_M}{r} \beta (2,5 \cos^2 \theta - 0,5) \quad (9.6)$$

wobei

$$\beta = g_2^0 / g_1^0 = \frac{2d}{R_M} \quad (9.7)$$

abgekürzt wurde. In Abbildung 9.1 sind die Lösungen zu dieser Bedingung eingezeichnet. Für eine Überlagerung eines zentrierten Dipols mit einem Quadrupol tendiert zum einen der Äquator hin zum Planetenzentrum (für $X \rightarrow 0$) und zum anderen gibt es einen zusätzlichen Lösungsast in der südlichen Hemisphäre. Für einen stärkeren Quadrupol gäbe es also auch eine Schar Punkte mit $B_\rho = 0$ in der südlichen Hemisphäre. Entweder benötigt man eine große radiale Variation der Messabdeckung bis sehr nah zum Planeten hin, oder man deckt auch die südliche Halbkugel ab, um mittels der Äquatormethode den Unterschied zwischen einem Offsetdipol und den beiden zentrierten Multipolen festzustellen.

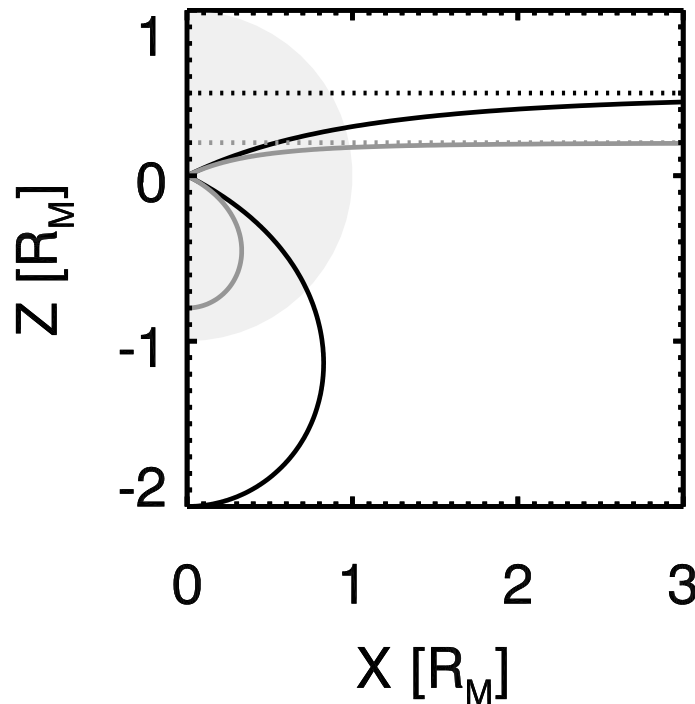


Abbildung 9.1: Lösungen der Äquatorbedingung. Die schwarze Linie markiert den Fall $\beta = 1$ und die graue Linie den Fall $\beta = 0,4$. Die gepunkteten Linien zeigen im Vergleich dazu den Äquator eines reinen Offsetdipols an. Der hellgraue Halbkreis markiert den Planeten.

In Abbildung 9.2 sind die Feldlinienbilder eines Offsetdipols für eine Verschiebung von $d = 0,19R_M$ und der entsprechenden Superposition von zentriertem Dipol mit zentriertem Quadrupol dargestellt. Hieraus ist ersichtlich, dass die Unterschiede zwischen den beiden Modellen für den diskutierten Offset eher vernachlässigbar sind. Die bisherigen Überlegungen basieren aber nur auf einem rein internen Feld. In Realität kommt noch der externe, zeitlich sehr stark variierende Magnetfeldanteil hinzu und erschwert damit die Voraussetzungen, zwischen beiden Modellen zu unterscheiden. In Zukunft könnte man die ruhigen Orbits selektieren und die Analyse bezüglich des Dipoloffsets wiederholen.

Bei einem Offsetdipol sollte auch die gesamte Magnetosphäre versetzt sein, da das Magnetfeld im wesentlichen das Hindernis für den Sonnenwind darstellt. Daher müsste die Magnetopause bei einem Offset von ca. 400 km deutlich nach Norden verschoben sein. Wenn man die Symmetrie der Magnetopausendurchgänge bezüglich des *hermeographischen* Äquators betrachtet, sollte sich eine bimodale Verteilung einstellen wie in Abbildung 9.3 gezeigt.

Winslow et al. (2013) haben systematisch für das Jahr 2011 die Magnetopausendurchgänge untersucht. Die Durchgänge konnten meist durch eine Rotation des Magnetfeldes bzw. durch die Änderung in der Fluktuation des Magnetfeldbetrags nachgewiesen werden. Sie identifizierten in jedem Orbit mehrere Magnetopausendurchgänge und veröffentlichten eine Liste mit den jeweils innersten und äußersten Durchgängen. Bei der Analyse sahen die Autoren den Offsetdipol als erwiesene Tatsache an.

In Abbildung 9.4 werden die Ergebnisse der Symmetrieuntersuchung von 609 Ma-

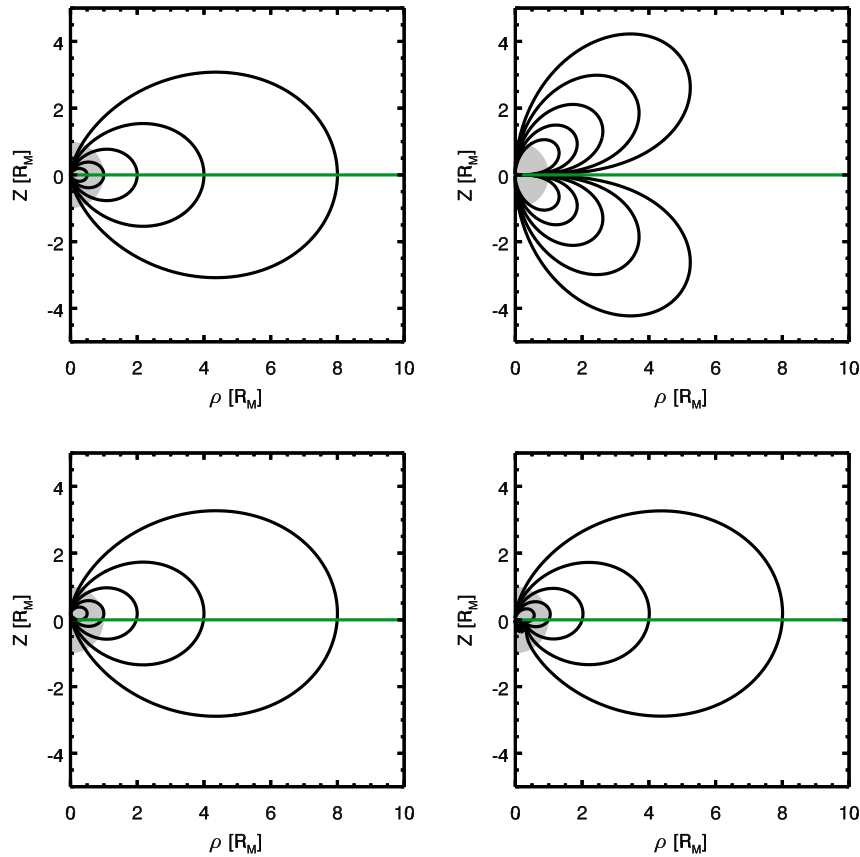


Abbildung 9.2: Feldlinienbilder für den Offsetdipol und die Überlagerung der zentrierten Multipole. Die Z-Achse ist die Rotationsachse und $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}$ gibt den Abstand zur Rotationsachse an. Die grüne Linie zeigt den hermeographischen Äquator. Oben links: Feldlinien eines zentrierten Dipols. Oben rechts: Feldlinien eines zentrierten Quadrupols. Unten links: Feldlinien eines Offsetdipols für eine Verschiebung von $d = 0,19R_M$. Unten rechts: Feldlinien der Superposition von zentriertem Dipol der Stärke G_1^0 mit zentriertem Quadrupol der Stärke $0,39G_1^0$.

gnetopausendurchgängen dargestellt. Es zeigt sich, dass die Magnetopause trotz Offsetdipols symmetrisch zum hermeographischen Äquator zu sein scheint. Dies widerspricht den Analyseergebnissen des internen magnetischen Feldes. Mehr Messdaten von magnetisch ruhigen Orbits können eventuell ein differenzierteres Bild ergeben. Nicht zuletzt kann die BepiColombo-Mission mit ihren beiden Orbitalen die Form der Magnetopause besser bestimmen, da dann eine Sortierung der Magnetopausendurchgänge nach Sonnenwindbedingungen zuverlässig durchführbar ist. Außerdem wird mit BepiColombo die bisher vernachlässigte Südhemisphäre vermessen. Dort sollten sich die größeren Unterschiede zwischen einem echten Offset-Dipol und einer zentrischen Überlagerung von einem Dipol und einem Quadrupol zeigen (Richer et al. 2012).

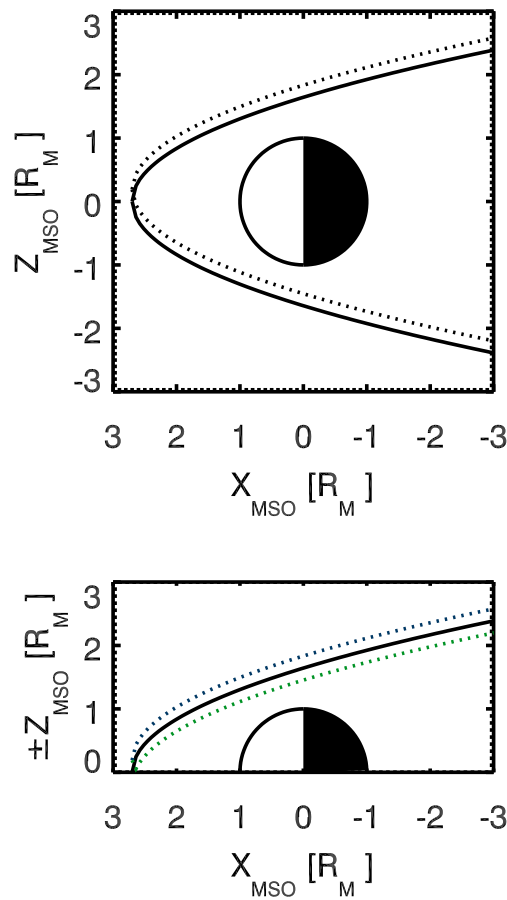


Abbildung 9.3: *Oben*: Schematische Darstellung des Planeten in einem meridionalen Schnitt ($Y = 0$) mit einer zentrierten Magnetopause (durchgezogene Linie) und einer 400 km nach Norden versetzten Magnetopause (gepunktete Linie). *Unten*: In die Nordhälfte gespiegelte Magnetopausen aus dem oberen Beispiel. Bei der versetzten Magnetopause (farbige Linien) sollte sich wie dargestellt eine bi-modale Verteilung der Magnetopausendurchgänge.

9.2 Vergleich der Modelle zum Merkurdynamo mit den Messergebnissen

Zur Erklärung des schwachen Merkurfeldes wurden eine Reihe von speziellen Dynamo-Modellen entworfen. Diese setzen eine spezielle innere Struktur voraus, die sich vom Erdkern wesentlich unterscheidet. Eine für die Konvektion im Kern, und damit für den Dynamo, wichtige Größe ist der Radius des inneren, festen Kerns.

Wie schon im Kapitel über die Kernentwicklung 5.4 dargestellt, wächst der innere feste Kern bis schlussendlich der gesamte Kern gefroren ist. Die aktuelle Größe des festen inneren Kerns der Erde kann mittels seismischer Methoden bestimmt werden. Da es bisher noch kein Seismometer auf Merkur gab, steht der direkte Nachweis des inneren Kerns von Merkur bisher noch aus. Es wurden eine Reihe von Methoden vorgeschlagen um den Radius des inneren Kerns aus dem Schwerfeld (z.B. Spohn et al. 2001), aus der Rotationsdynamik (Veasey und Dumberry 2011), aus thermischen Entwicklungsmodellen

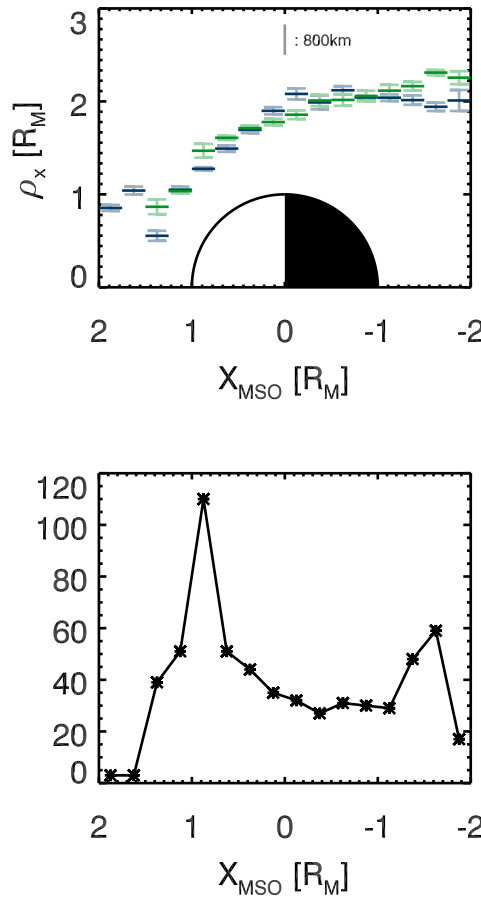


Abbildung 9.4: *Oben:* Von MESSENGER detektierte Magnetopausendurchgänge. Aufgetragen ist das Histogramm (Median) der Abstände $\rho = \sqrt{Y^2 + Z^2}$ zur X-Achse. In blau (grün) sind die Durchgänge in der nördlichen (südlichen) Hemisphäre aufgetragen. Unterlegt sind die Standardfehler zu den Medianen für die einzelnen Bins. *Unten:* Anzahl der Magnetopausendurchgänge in den einzelnen Bins. Daten von Winslow et al. (2013).

(z.B. Breuer et al. 2008, Williams et al. 2007) oder aus den Magnetfelddaten (Stanley et al. 2007) einzugrenzen.

Wenn der Schwefelanteil im Kern sehr hoch ist, bleibt er für sehr lange Zeit komplett flüssig. Williams et al. (2007) präsentiert ein Szenario, bei dem sich der innere Kern erst $2,7 \cdot 10^9$ Jahre nach der Entstehung von Merkur bildet, bei einem angenommenen Schwefelgehalt von 6wt%. Dann hätte der innere Kern heute ungefähr einen relativen Radius von ca. $R_{ICB}/R_{CMB} = 0,5$. Nach einer Studie von Heimpel et al. (2005) bildet sich für kleine innere Kernradien meist nur eine einzige großskalige Konvektionszelle im Kern aus (s. Abbildung 9.5) und der resultierende Dynamo erzeugt nur ein schwaches Magnetfeld an der Oberfläche. Wenn Merkur sich in einem Stadium mit relativ jungem Kern befindet, kann dies das schwache Dipolfeld erklären. Mit zunehmendem inneren Kernradius bilden sich auch mehr Konvektionszellen aus und die Effektivität des Dynamos nimmt zu (Heimpel et al. 2005). Dann sollte auch das Oberflächenfeld erdähnliche Stärken erreichen.

Eine andere Möglichkeit, ein schwaches Oberflächenfeld mit einem nicht-erdähnlichen inneren Kernradius zu erhalten, wäre ein sehr großer innerer Kern, z.B. mit $R_{ICB}/R_{CMB} =$

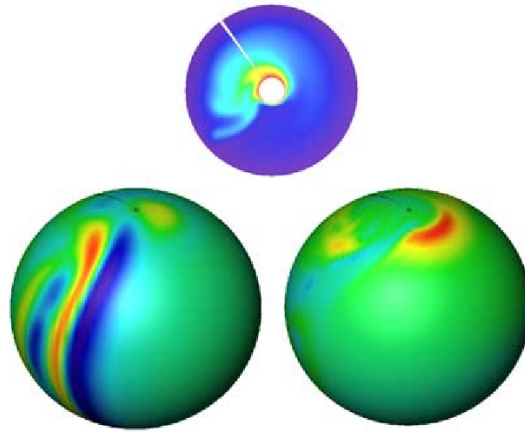


Abbildung 9.5: Temperaturverteilung in einem äquatorialem Schnitt (oben), radiale Strömungsgeschwindigkeit (links) in der Dynamozone und radiales Magnetfeld am Rande des Kerns (rechts) für einen kleinen inneren Kern ($\chi = 0,15$) und relativ schwacher Konvektion ($Ra = 8Ra_c$). Die Temperatur variiert von heiß (rot, am inneren Kern) zu kalt (blau, an der Kern-Mantel-Grenze). Bei der Geschwindigkeit und dem Magnetfeld bedeutet eine blaue Farbe einwärts gerichtet und rot auswärts gerichtet. Abbildung aus Heimpel et al. (2005).

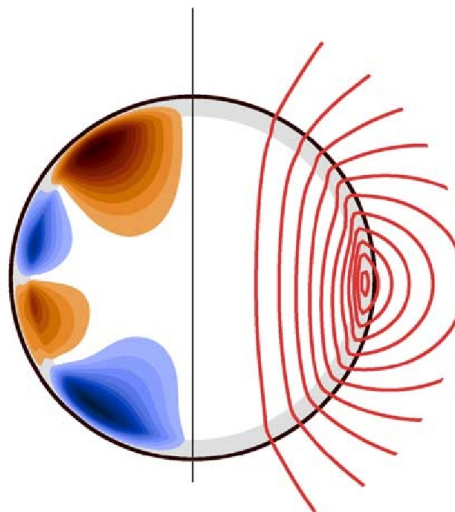


Abbildung 9.6: Achsensymmetrisches, toroidales Magnetfeld (links) und das achsensymmetrische poloidale Magnetfeld (rechts) in einem extrem dünnen äußeren Kern. Abbildung aus Stanley et al. (2005).

0,9, eine Situation die von Stanley et al. (2005) studiert wurde. In diesem Fall dominiert die Grenzschicht mit starker Strömungsverscherung an der Grenze zum inneren Kern den Dynamoprozess und es wird hauptsächlich ein toroidales Magnetfeld erzeugt (Stanley et al. 2005). Dieses toroidale Feld wird mangels einer ausreichenden Konvektion nur zu einem geringen Anteil in ein poloidales Magnetfeld umgewandelt (s. Abbildung 9.6). Ein großer innerer Kern ist realistisch, wenn das Kernwachstum schon früh begonnen hat. Dies würde einen niedrigen Schwefelgehalt im Kern voraussetzen. Dieser darf aber auch

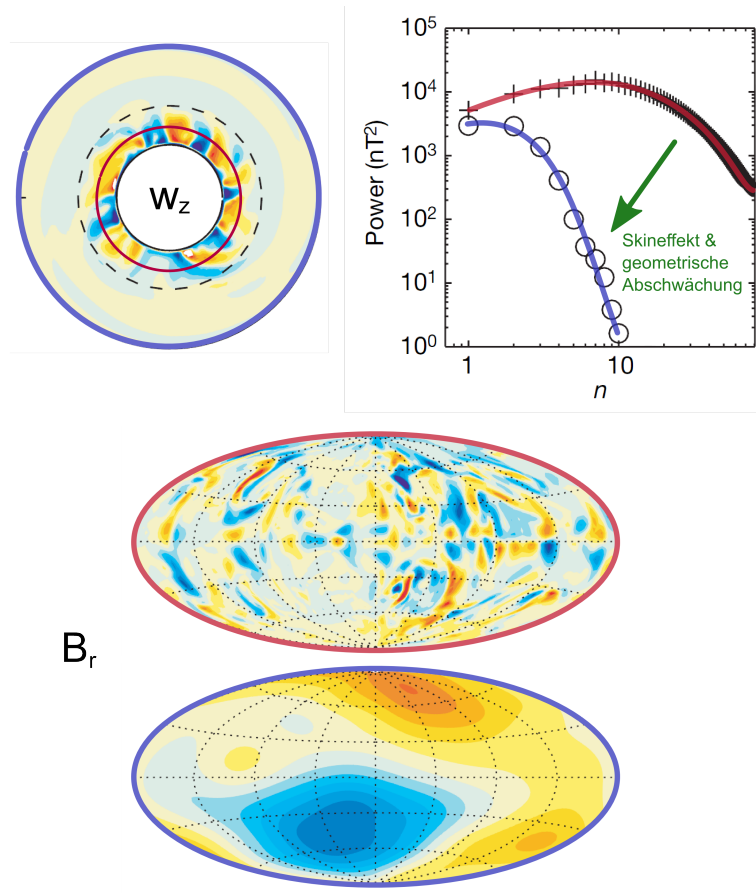


Abbildung 9.7: Dynamomodell für den Merkur nach Christensen (2006). *Oben links:* Axiale Vortizität. *Oben rechts:* Magnetische Spektren. Kreuze stehen für das Spektrum im konvektierenden Teil des Kerns und Kreise für das Spektrum an der Oberfläche. *Unten:* Radiales Magnetfeld. In der oberen Teilabbildung ist das Magnetfeld in der Dynamoschicht und in der unteren Teilabbildung an der Oberfläche dargestellt. Rot bedeutet hier auswärts und blau einwärts gerichtetes Feld. Einzelabbildungen aus Christensen (2006).

nicht zu gering sein, da sonst die Entropieproduktion heutzutage nicht mehr für chemische Konvektion und damit für einen Dynamoprozess ausreichen würde (Williams et al. 2007). Außerdem kommt die chemische Konvektion ab einer gewissen Konzentration von Schwefel im äußeren Kern zum Erliegen, da irgendwann die Lösung eutektisch und daher dann der Schwefel in den festen Kern mit integriert wird. Folglich wird in diesem Szenario kein Schwefel mehr freigesetzt, der sonst für die chemische Konvektion verantwortlich wäre. Spohn et al. (2001) gehen davon aus, dass der eutektische Punkt schon bei einem relativen Kernradius von 0,7 erreicht wird.

Ein weiteres Modell zur Erklärung der niedrigen Dipolfeldstärke basiert auf der Annahme, dass der Temperaturgradient an der Kern-Mantel-Grenze sub-adiabatisch ist (Christensen 2006, Christensen und Wicht 2008). Dies hätte zur Konsequenz, dass in den äußeren Schichten des flüssigen Kerns keine thermisch getriebene Konvektion stattfindet - also auch kein Dynamoprozess. Hier würde dann das Magnetfeld allein durch magnetische Diffusion nach außen transportiert werden (s. Abbildung 9.7). Auf Grund der relativ

langsamen Rotation des Planeten Merkurs, schätzt Christensen und Wicht (2008) eine lokale Rossby-Zahl von 10 ab (s. Kapitel 5.7). Dies würde bedeuten, dass im magnetischen Spektrum von Merkur eher die höheren Multipole dominieren. Da die zeitliche Variation der Multipole mit dem Grade zunimmt (Olsen et al. 2006), besitzt der Merkurdynamo also räumlich und zeitlich stark variierende Spektralanteile. Wenn der Dynamo sich nun unterhalb einer dicken thermisch stabilen Schicht befindet, werden diese fluktuierenden Multipole zum einen geometrisch und zum anderen elektrisch über den Skineffekt gedämpft bevor sie die Oberfläche erreichen. Ein Problem bei diesem Modell ist, dass die stabile Schicht wahrscheinlich nur thermisch stabil ist. Wenn im Kern auch chemische Konvektion stattfindet, könnte die Schicht trotz des sub-adiabatischen Temperaturgradienten konvektieren. In den Simulationen von Christensen (2006), Christensen und Wicht (2008) wurde die sog. Kodichte verwendet. Dabei wird die chemische Konvektion implizit berücksichtigt aber die thermische und chemische Diffusivität wird gleich behandelt. Realistisch wäre es aber, eine um Größenordnungen verschiedene Diffusivität zu verwenden. Manglik et al. (2010) berücksichtigen dies und stellen fest, dass die Stabilität der Schicht vom durchschnittlichen Schwefelgehalt im Kern abhängt. Wenn dieser einen Bruchteil von einem Gewichtsprozent überschreitet, bilden sich in den Simulationen fingerartige Konvektionsbereiche durch die ehemals stabile Schicht aus und transportieren das tief im Inneren liegende Dynamofeld nach außen (s. Abbildung 9.8) und der Effekt der stabilen Schicht wäre zunichte gemacht.

Wie im Kapitel 5.4 über die Kernentwicklung dargestellt, geht man heutzutage davon aus, dass der Merkurkern zu einem Prozentsatz bis zu 6wt% aus gelöstem Schwefel besteht, damit er zumindest teilweise flüssig sein und das planetare Magnetfeld in einem Dynamoprozess erhalten kann. Aus den Messungen des Schwerefeldes und der Rotationsdynamik des Merkurs konnten Smith et al. (2012) das Trägheitsmoment des Mantels einschränken. Dieses Trägheitsmoment ist allerdings ungewöhnlich hoch für herkömmliche Bestandteile des Mantels. Eine mögliche Erklärung wäre, dass sich direkt oberhalb des flüssigen Kerns eine feste Schicht aus FeS anschließt. Smith et al. (2012) begrenzen das Ausmaß dieser Schicht auf 200 km. Das vom Dynamo erzeugte Magnetfeld würde in dieser Schicht über den Skineffekt gedämpft, jedoch ist nicht geklärt, wie stark dieser Effekt wäre.

Ein anderes Modell basiert auf der These, dass der Merkurkern sich in einem sehr speziellen thermischen Zustand befindet, in dem das Eisen nicht nur an der Grenze zum inneren Kern sondern auch mitten im ansonsten flüssigen Kern ausfrieren kann (Vilim et al. 2010). Das ausgefällte Eisen sinkt dann nach unten („*iron snow*“), während der leichte Schwefel nach oben steigt. Zusätzlich dazu kann es direkt unterhalb der Kern-Mantel-Grenze wieder zu einer Ausfällung des Eisens kommen. Dieser doppelte *snow-state* ist für relativ hohe Schwefelanteile von 8 – 10wt% im Kern vorhergesagt. Diese Situation ist in Abbildung 9.9 schematisch dargestellt. Diese ineinander gesetzten Dynamos gehen eine gegenseitige Rückkopplung miteinander ein. So hat der innere Dipol stets ein anderes Vorzeichen als der äußere. Dies schwächt den Dipol und verstärkt den Oktupolanteil an der Oberfläche (s. Abbildung 9.9, rechts).

Einen erster Überblick über die magnetischen Spektren an der Oberfläche wurde von Schubert und Soderlund (2011) erstellt und in dieser Arbeit um die aktuelle MESSENGER-Ergebnisse und der Feedbackdynamosimulation erweitert. Das Ergebnis ist in Abbildung 9.10 gezeigt. Hierbei wurde die magnetische Energie in den einzelnen Multipole auf den

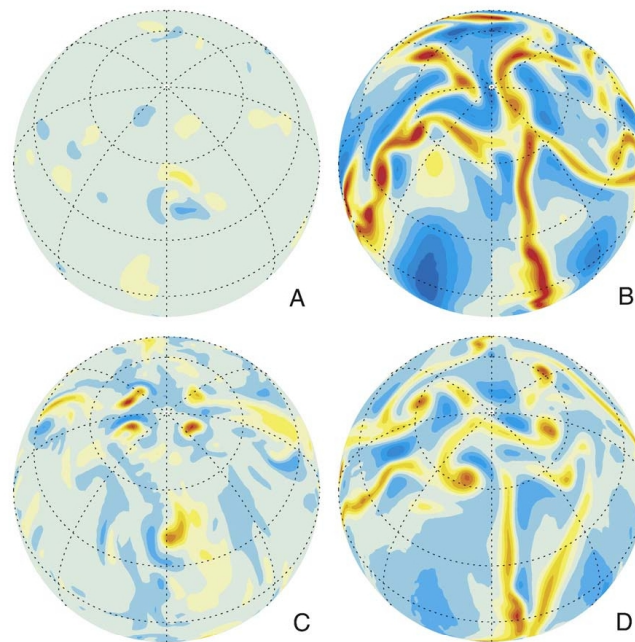


Abbildung 9.8: Ergebnisse einer Studie von Manglik et al. (2010) zur Auswirkung des Schwefelgehalts auf die Kernkonvektion im Merkurmodell von Christensen (2006). *A*: Radiale Geschwindigkeit nah an der Kern-Mantel-Grenze, Dynamo mit gleichen Diffusivitäten. *B*: Radiale Geschwindigkeit nah am inneren Kern, Dynamo mit gleichen Diffusivitäten. *C*: Radiale Geschwindigkeit nah an der Kern-Mantel-Grenze, äußerer Kern mit hohem Schwefelgehalt und unterschiedlichen Diffusivitäten. *D*: Radiale Geschwindigkeit nah am inneren Kern, äußerer Kern mit hohem Schwefelgehalt und unterschiedlichen Diffusivitäten. Abbildung aus Manglik et al. (2010).

Dipol normiert, damit die Spektren besser vergleichbar sind. Das Modell nach Christensen (2006), Christensen und Wicht (2008) passt demnach sehr gut zu den Daten von Uno et al. (2009), die jedoch nur auf den Messdaten der Prä-Orbit Vorbeiflügen von MESSENGER und den zwei Vorbeiflügen von MARINER 10 basieren. Mit den neuen Daten aus der Orbitphase von MESSENGER von Anderson et al. (2012) gibt es allgemein keine gute Übereinstimmung der Modelle mit den Messdaten für alle Multipole bis Grad 6. Nur vereinzelt passt ein Multipol der Modelle mit den Messdaten exakt überein (Quadrupol von Heimpel et al. (2005) und der Hexadekapol von Christensen (2006)). Der Feedbackdynamo stimmt bei den höheren Multipolen 5 und 6 und beim Quadrupol eine eher schlecht mit den gemessenen Spektrum überein. Andererseits gibt es eine gute Übereinstimmung beim Oktupol und beim Hexadekapol.

Bei diesem Vergleich sei angemerkt, dass die Spektren aus den Dynamomodellen zeitlich gemittelt und damit relativ gut Schätzwerte für den mittleren Zustand der Dynamomodelle sind. Dagegen ist es nicht klar, ob das heutige Magnetfeld des Merkurs typisch oder atypisch ist. Zum Beispiel könnte sich der reale Merkurdynamo gerade in einer Umkehr oder in einer anderen Umstrukturierung befinden. Für eine weitere Beurteilung welches Dynamomodell am wahrscheinlichsten zutreffen kann, sollte in Zukunft

1. die Schwankung in den einzelnen Spektralanteilen verglichen,

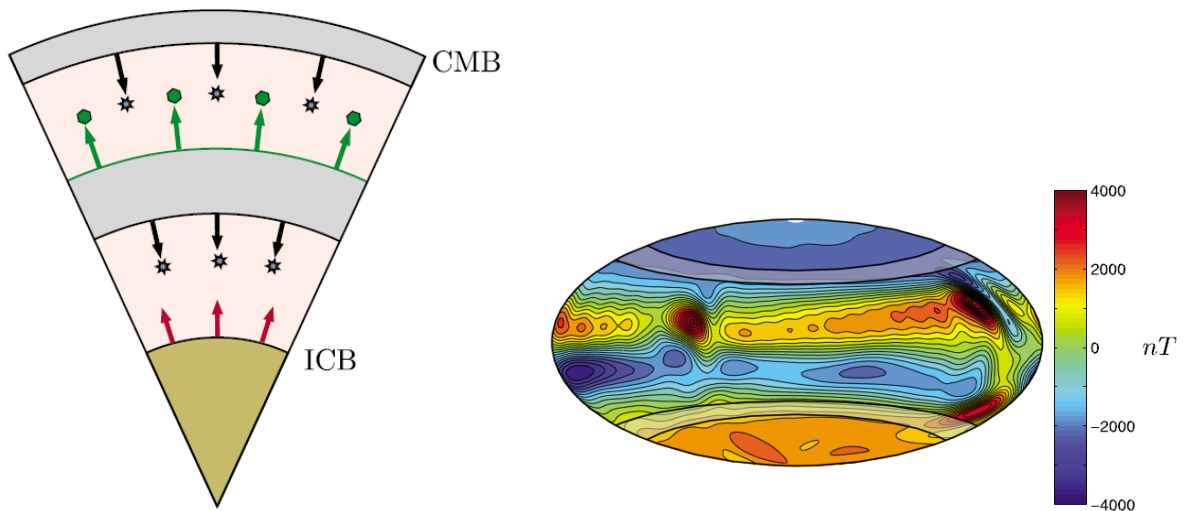


Abbildung 9.9: Das *double-snow-state*-Dynamomodell. *Links*: Schema der *double-snow-states*. Die stabil geschichteten Zonen sind in grau eingezeichnet. Von der Kern-Mantel-Grenze (ICB) wird latente Wärme frei (rote Pfeile). Schwefel (grüne Hexagone) steigt von der äußeren stabil geschichteten Schicht auf und Eisen fällt von den äußeren Kannten der stabilen Schichten hinunter (schwarze Sterne). *Rechts*: Radiales Magnetfeld an der Kern-Mantel-Grenze. Rot bedeutet auswärts und Blau einwärts gerichtetes Magnetfeld. Der Tangentialzylinder der inneren stabil geschichteten Schicht ist grau schattiert. Abbildungen aus Vilim et al. (2010).

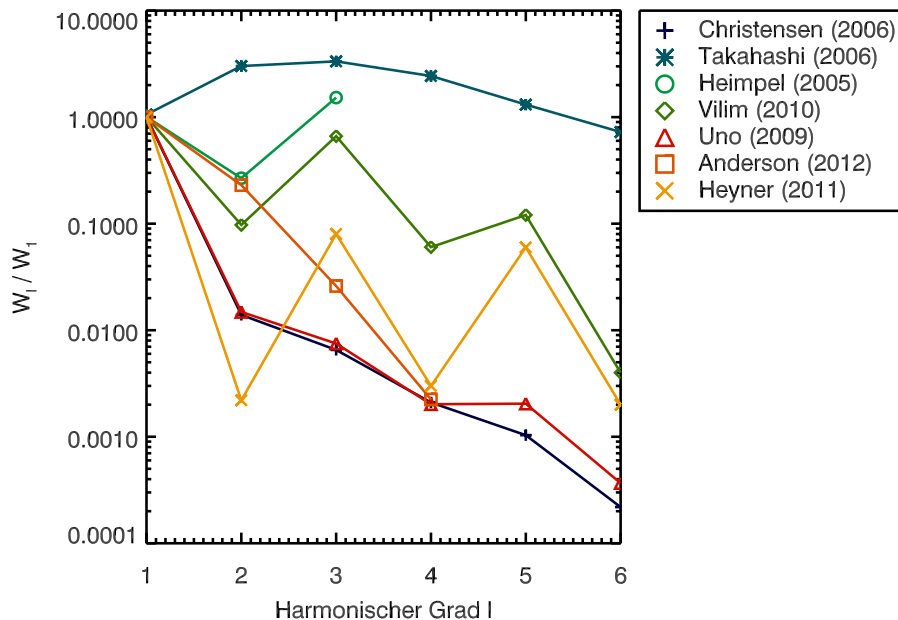


Abbildung 9.10: Mauersberger Spektren der magnetischen Multipole von verschiedenen Dynamomodellen (siehe Legende der Autoren) und ermittelt aus den Messdaten (rot-orange und orange) an der Planetenoberfläche normiert auf den Dipol. Die Linien zwischen den Symbolen sind nur für eine bessere Übersicht eingezeichnet. Abbildung nach Schubert und Soderlund (2011).

2. zusätzlich auch die Spektren bezüglich der Ordnung m dargestellt,
3. der Schwefelgehalt besser eingegrenzt und damit einhergehend die Größe des inneren Kerns abgeschätzt werden.

Es ist erstaunlich, dass das bisher analysierte Magnetfeld auch in den höheren Multipolen so ausgeprägt achsensymmetrisch ist. Dies widerspricht dem Antidynamotheorem nach Cowling, nach dem ein Dynamo kein rein achsensymmetrisches Feld aufrecht erhalten kann. Im Inneren der Dynamoschicht muss also das Magnetfeld nichtachsensymmetrisch sein. Wenn man das l -Spektrum bezüglich des eventuell verschobenen magnetischen Dipolzentrum bildet, sind die Anteile für $l > 1$ verschwindend gering. Es ist schwierig, dies mit Dynamomodellen mit recht komplexen Konvektionsmustern zu erklären.

Während die meisten hier aufgezählten Dynamo-Modelle eine klare Anforderung an die innere Struktur von Merkur stellen, ist dies bei dem Feedback-Dynamo nicht gefordert. Daher lässt sich der Feedback-Dynamo ohne weiteres mit anderen Modellen kombinieren.

Mit mehr Messdaten lässt sich nur schwer das Spektrum für Grade > 4 erweitern, da, wenn man den Abwärtstrend im gemessenen Spektrum fortführt, nur noch sehr schwache höhere Multipole zu erwarten sind. Die dynamische Magnetosphäre und die eventuell vorhandene Krustenmagnetisierung erschwert diese Messaufgabe zusätzlich. Die BepiColombo-Mission besitzt aber mit ihren zwei Orbitalern eine wesentlich bessere Ausgangslage für die Dateninversion als MESSENGER, da die externen Störungen von der Magnetosphäre und die Sonnenwindbedingungen besser erfasst werden können.

Der gemessene starke Quadrupol erfordert eine Revision der bisher verwendeten Feedbackdynamomodelle, da hauptsächlich dipoldominierte Feedbackdynamos betrachtet wurden. Bei den vereinfachten kinematischen Simulationen (s. Kapitel 6) zeigte sich, dass ein externer Dipol zunächst nur in den Erzeugungsprozess des internen Dipols eingreift. Wenn der Dynamo ein reines Quadrupolfeld erzeugen würde, wären beim kinematischen Modell keine Auswirkungen des Feedbacks festzustellen. Die Stärke des Quadrupols beim Feedbackdynamo könnte damit auch alleine durch den Referenzdynamo festgelegt sein. Allerdings wird das externe Dipolfeld wahrscheinlich beim Eindringen in den Kern modifiziert und das Zusammenspiel der einzelnen Moden ist nicht mehr einfach überschaubar. Diese Umwandlung des externen Feldes durch die Kernkonvektion sollte in Zukunft mit einer kinematischen Studie mit dem vollständigen 3D-Modell geprüft werden.

10 Diskussion und Ausblick

Das Magnetfeld des Merkur scheint nicht durch Modelle basierend auf der gängigen Dynamotheorie, die sich bei vielen planetaren Magnetfeldern bewährt hat, erklärbar zu sein. Nach verschiedenen Skalengesetzen müsste das Merkurpolfeld um mindestens eine Größenordnung stärker sein als es in-situ gemessen worden ist. Um diesen scheinbaren Widerspruch aufzuklären, wurde in dieser Arbeit das Modell des Feedbackdynamos untersucht, erweitert und auf den Merkur angewendet. Der Dynamo im Inneren erfährt in diesem Modell eine negative Rückkopplung durch die ihn umgebende Magnetosphäre, da das externe Feld an der Kern-Mantel-Grenze im wesentlichen antiparallel zum internen Feld ist. Dies reduziert die Effizienz des Dynamoprozesses und schwächt das außen herrschende Dynamomagnetfeld.

In der Magnetosphäre gibt es verschiedene externe Feldquellen, von Bedeutung sind hier das homogene Feld der Magnetopause und das Feld des Neutralschichtstroms. Ein Ringstrom kann für den Merkur auf Grund der kleinen Magnetosphäre nicht auf Dauer existieren. Für den Dynamo ist das langzeitgemittelte Feld von Interesse, da das externe Feld auf Zeitskalen der magnetischen Diffusionszeit in den Kern transportiert wird. In dieser Zeitspanne, für Merkur ca. 30000 Jahre, werden alle nichtachsensymmetrischen Felder durch den Skineffekt stark gedämpft. Für die Dynamomodellierungen hat sich die Parametrisierung des externen Magnetfeldes in Form der Antwortfunktion bewährt, die die Stärke des externen Magnetfeldes als Funktion des internen beschreibt. Diese Funktion wurde mit verschiedenen Modellierungen der Merkurmagnetosphäre abgeschätzt. Dabei zeigte sich, dass das homogene externe Feld in erster Näherung unabhängig vom internen Dipol ist und hauptsächlich vom Sonnenwinddruck bestimmt wird. Dies ist die Folge der Energieerhaltung bei der Umwandlung des dynamischen Sonnenwinddruckes in magnetischen Druck innerhalb der Magnetopause. Wenn jedoch die Magnetopause auf Grund eines starken dynamischen Drucks oder eines schwachen internen Dipolfeldes in die Nähe des Planeten gelangt, wird das externe Feld abgeschwächt, da die Oberfläche das Magnetopausenstromsystem beeinträchtigt. Die erstaunliche Konstanz des externen Feldes wurde mittels einer Reihe von Hybrid-Simulationen der Wechselwirkung von Sonnenwind mit verschiedenen starken planetaren Dipolfeldern bestätigt. Dabei zeigte sich auch, dass der Einfluss des Neutralschichtstroms messbar aber vernachlässigbar ist.

Zur Erklärung des Merkurmagnetfeldes wurden verschiedene Modelle hervorgebracht, die jeweils spezielle Anforderungen an die innere Struktur voraussetzen. Dabei spielt der Schwefel- oder Siliziumgehalt im äußeren Kern eine besondere Rolle, da dieser die Größe des inneren Kerns eingrenzt und den Charakter der Kernkonvektion beeinflusst. Die Anwendbarkeit des Feedbackdynamoeffektes ist davon nicht primär betroffen. Vielmehr hat sich sowohl in vereinfachten kinematischen $\alpha\Omega$ -Dynamosimulationen als auch in vollständigen 3D-Modellen gezeigt, dass der Einschaltvorgang von besonderer Wichtigkeit

ist. Denn nicht die absolute Amplitude des externen Feldes sondern das relative Verhältnis von externem zu internem Dipolfeld, wie sie in der relativen Antwortfunktion ausgedrückt wird, ist für die Entwicklung des Dynamos entscheidend. Schwach angeregte und dazu noch schwach initialisierte Dynamos können durch den Feedbackeffekt in einem Zustand mit schwacher magnetischen Gesamtenergie und Dipolfeld stabilisiert werden. Die Form der relativen Antwortfunktion bestimmt dabei die stationären Zustände. Je höher das Maximum der relativen Antwortfunktion ausfällt, desto stärker kann der zu stabilisierende Dynamo sein. Die Lage der Maximumsstelle bestimmt den möglichen Bereich der internen Dipolfelder, die mittels magnetosphärischem Feedback stabil gehalten werden können. Dieses Maximum ist hauptsächlich durch den Sonnenwinddruck bestimmt. Dieser wiederum ist über die geologischen Zeitskalen nicht konstant geblieben, sondern betrug beim Merkur in der Frühzeit des Sonnensystems das 100-fache gegenüber dem heutigen Wert. In einer Studie mit erhöhten Antwortfunktionen konnte die Auswirkung des Feedbackeffektes auf den jungen Merkur bzw. auf extrasolare Planeten gezeigt werden. Für eine realistischere Antwortfunktion sollten in Zukunft noch die induzierten Felder im Merkurmantel, sowie der Kollaps der Magnetopause an der Planetenoberfläche besser studiert und modelliert werden.

Die Magnetfelddaten der MESSENGER-Sonde zeigen, dass das Merkurmagnetfeld sehr achsensymmetrisch ist und hauptsächlich von einem Offset-Dipol dominiert wird. Die Symmetrieuntersuchung der Magnetopause deutet allerdings auf einen zentrierten Dipol hin. Außerdem sind die Aufzeichnungen der Sonde auf die nördliche Hemisphäre beschränkt, was zu einer Fehlanalyse führen kann. Das gemessene Offsetdipolspektrum passt nicht zu den bisher veröffentlichten Dynamomodellen. Weitere Einschränkungen der inneren Struktur sind nötig, um die vorgeschlagenen Modelle besser bewerten zu können. In Zukunft könnte eine Kombination zwischen einem Strukturmodell und dem Feedbackdynamo das schwache Merkurmagnetfeld erklären. Dazu sind mehr Messdaten und verbesserte Magnetfeldanalysemethoden erforderlich, wie sie von der BepiColombo-Mission erwartet werden.

Literaturverzeichnis

- Abramowitz, M., Stegun, I. A., 1970, Handbook of mathematical function with formulas, graphs, and mathematical tables, National Institute of Standards and Technology, Applied Mathematics Series, 55
- Al-Shamali, F., Heimpel, M., Aurnou, J., 2004, Varying the spherical shell geometry in rotating thermal convection, *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 98, 153–169
- Alexeev, I. I., Kalegaev, V. V., 1995, Magnetic field and plasma flow structure near the magnetopause, *Journal of Geophysical Research*, 100, 19 267–19 276
- Alexeev, I. I., Sibeck, D. G., Bobrovnikov, S. Y., 1998, Concerning the location of magnetopause merging as a function of the magnetopause current strength, *Journal of Geophysical Research*, 103, 6675–6684
- Alexeev, I. I., Belenkaya, E. S., Bobrovnikov, S. Y., Kalegaev, V. V., 2003, Modelling of the electromagnetic field in the interplanetary space and in the Earth's magnetosphere, *Space Science Reviews*, 107, 7–26
- Alexeev, I. I., Belenkaya, E. S., Slavin, J. A., Korth, H., Anderson, B. J., Baker, D. N., Boardsen, S. A., Johnson, C. L., Purucker, M. E., Sarantos, M., Solomon, S. C., 2010, Mercury's magnetospheric magnetic field after the first two MESSENGER flybys, *Icarus*, 209, 23–39
- Anderson, B. J., Johnson, C. L., Korth, H., Winslow, R. M., Borovsky, J. E., Purucker, M. E., Slavin, J. A., Solomon, S. C., Zuber, M. T., McNutt, R. L., 2012, Low-degree structure in mercury's planetary magnetic field, *Journal of Geophysical Research: Planets* (1991–2012), 117
- Arkani-Hamed, J., Ghods, A., 2011, Could giant impacts cripple core dynamos of small terrestrial planets?, *Icarus*, 212, 920–934
- Bagdonat, T., 2005, Hybrid Simulation of Weak Comets, Dissertation, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig
- Baumjohann, W., Treumann, R. A., 1996, Basic space plasma physics, London: Imperial College Press
- Baumjohann, W., Blanc, M., Fedorov, A., Glassmeier, K.-H., 2010, Current Systems in Planetary Magnetospheres and Ionospheres, *Space Science Reviews*, 152, 99–134

- Belenkaya, E. S., Bobrovnikov, S. Y., Alexeev, I. I., Kalegaev, V. V., Cowley, S. W. H., 2005, A model of Jupiter's magnetospheric magnetic field with variable magnetopause flaring, *Planetary and Space Science*, 53, 863–872
- Benkhoff, J., van Casteren, J., Hayakawa, H., Fujimoto, M., Laakso, H., Novara, M., Ferri, P., Middleton, H. R., Ziethe, R., 2010, BepiColombo - Comprehensive exploration of Mercury: Mission overview and science goals, *Planetary and Space Science*, 58, 2–20
- Berchem, J., Russell, C. T., 1982, The thickness of the magnetopause current layer - ISEE 1 and 2 observations, *J. Geophys. Res.*, 87, 2108–2114
- Breuer, D., Hauck II, S. A., Buske, M., Pauer, M., Spohn, T., 2008, Interior evolution of mercury, in *Mercury*, S. 47–78, Springer
- Breuer, D., Labrosse, S., Spohn, T., 2010, Thermal evolution and magnetic field generation in terrestrial planets and satellites, *Space Science Reviews*, 152, 449–500
- Bronstein, I., Semendjajew, K., Musiol, G., Mühlig, H., 2001, *Taschenbuch der Mathematik*, Deutsch, 5. Aufl.
- Buffett, B., Bloxham, J., 2002, Energetics of numerical geodynamo models, *Geophysical Journal International*, 149, 211–224
- Bullard, E., 1978, The disk dynamo, in *American Institute of Physics Conference Series*, Bd. 46 von American Institute of Physics Conference Series, S. 373–389
- Bullard, E., Gellman, H., 1954, Homogeneous Dynamos and Terrestrial Magnetism, *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 247, 213–278
- Buske, M., 2006, Dreidimensionale thermische Evolutionsmodelle für das Innere von Mars und Merkur, Dissertation, Universität Göttingen
- Cardin, P., Cugliandolo, L., 2008, *Dynamos: Lecture Notes of the Les Houches Summer School 2007*, Bd. 88, Elsevier Science
- Christensen, U., Wicht, J., 2007, Numerical dynamo simulations, *Treatise on Geophysics*, 8, 245–282
- Christensen, U. R., 2006, A deep dynamo generating Mercury's magnetic field, *Nature*, 444, 1056–1058
- Christensen, U. R., 2010, Dynamo Scaling Laws and Applications to the Planets, *Space Science Reviews*, 152, 565–590
- Christensen, U. R., Aubert, J., 2006, Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields, *Geophysical Journal International*, 166, 97–114
- Christensen, U. R., Wicht, J., 2008, Models of magnetic field generation in partly stable planetary cores: Applications to Mercury and Saturn, *Icarus*, 196, 16–34

- Christensen, U. R., Aubert, J., Olson, P., 2007, Convection-driven planetary dynamos, in Proceedings IAU Symposium, Bd. 239, S. 1–8, Cambridge Univ Press
- Cravens, T. E., 2004, Physics of Solar System Plasmas, Cambridge University Press
- Darah, A. A., Sarson, G. R., 2007, Axisymmetric field generation within an ambient axial field, *Astronomische Nachrichten*, 328, 25–35
- De Pater, I., Lissauer, J. J., 2010, Planetary sciences, Cambridge University Press
- Edberg, N. J. T., Nilsson, H., Futaana, Y., Stenberg, G., Lester, M., Cowley, S. W. H., Luhmann, J. G., McEnulty, T. R., Opgenoorth, H. J., Fedorov, A., Barabash, S., Zhang, T. L., 2011, Atmospheric erosion of Venus during stormy space weather, *J. Geophys. Res.*, 116, A09308
- Fossati, L., Haswell, C. A., Froning, C. S., Hebb, L., Holmes, S., Kolb, U., Helling, C., Carter, A., Wheatley, P., Collier Cameron, A., Loeillet, B., Pollacco, D., Street, R., Stempels, H. C., Simpson, E., Udry, S., Joshi, Y. C., West, R. G., Skillen, I., Wilson, D., 2010, Metals in the Exosphere of the Highly Irradiated Planet WASP-12b, *The Astrophysical Journal, Letters to the Editor*, 714, L222–L227
- Glassmeier, K.-H., 1997, The Hermean magnetosphere and its ionosphere-magnetosphere coupling, *Planet. Space Sci.*, 45, 119–125
- Glassmeier, K. H., Volpers, H., Baumjohann, W., 1984, Ionospheric Joule dissipation as a damping mechanism for high latitude ULF pulsations - Observational evidence, *Planetary and Space Science*, 32, 1463–1466
- Glassmeier, K.-H., Vogt, J., Stadelmann, A., Buchert, S., 2004, Concerning long-term geomagnetic variations and space climatology, *Ann. Geophys.*, 22, 3669–3677
- Glassmeier, K.-H., Auster, H.-U., Motschmann, U., 2007, A feedback dynamo generating Mercury's magnetic field, *Geophys. Res. Lett.*, 34, L22 201
- Glassmeier, K.-H., Richter, O., Vogt, J., Möbus, P., Schwalb, A., 2009, The Sun, geomagnetic polarity transitions, and possible biospheric effects: review and illustrating model, *Int. J. Astrobiol.*, 8, 147–159
- Glatzmaier, G. A., 1984, Numerical simulations of stellar convective dynamos. I - The model and method, *Journal of Computational Physics*, 55, 461–484
- Gómez-Pérez, N., Solomon, S. C., 2010, Mercury's weak magnetic field: A result of magnetospheric feedback?, *Geophysical Research Letters*, 37, L20204
- Gómez-Pérez, N., Wicht, J., 2010, Behavior of planetary dynamos under the influence of external magnetic fields: Application to Mercury and Ganymede, *Icarus*, 209, 53–62
- Greene, J. M., Miller, R. L., 1994, The field of a screened magnetic dipole, *Planetary and Space Science*, 42, 895–900

- Griessmeier, J., Stadelmann, A., Penz, T., Lammer, H., Selsis, F., Ribas, I., Guinan, E. F., Motschmann, U., Biernat, H. K., Weiss, W. W., 2004, The effect of tidal locking on the magnetospheric and atmospheric evolution of “Hot Jupiters”, *Astron. Astrophys.*, 425, 753–762
- Griessmeier, J., Preusse, S., Khodachenko, M., Motschmann, U., Mann, G., Rucker, H. O., 2007, Exoplanetary radio emission under different stellar wind conditions, *Planet. Space Sci.*, 55, 618–630
- Griessmeier, J.-M., Stadelmann, A., Motschmann, U., Belisheva, N. K., Lammer, H., Biernat, H. K., 2005, Cosmic Ray Impact on Extrasolar Earth-Like Planets in Close-in Habitable Zones, *Astrobiology*, 5, 587–603
- Grosser, J., Glassmeier, K.-H., Stadelmann, A., 2004, Induced magnetic field effects at planet mercury, *Planetary and Space Science*, 52, 1251–1260
- Heimpel, M., Aurnou, J., Al-Shamali, F., Gomez Perez, N., 2005, A numerical study of dynamo action as a function of spherical shell geometry, *Earth and Planetary Science Letters*, 236, 542–557
- Heyner, D., 2007, Magnetfeldmessungen am Merkur: Einfluss Externer Stromsysteme, Diplomarbeit, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig
- Heyner, D., Schmitt, D., Wicht, J., Glassmeier, K.-H., Korth, H., Motschmann, U., 2010, The initial temporal evolution of a feedback dynamo for Mercury, *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 104, 419–429
- Heyner, D., Schmitt, D., Glassmeier, K.-H., Wicht, J., 2011a, Dynamo action in an ambient field, *Astronomische Nachrichten*, 332, 36–42
- Heyner, D., Wicht, J., Gómez-Pérez, N., Schmitt, D., Auster, H. U., Glassmeier, K. H., 2011b, Evidence from Numerical Experiments for a Feedback Dynamo Generating Mercury’s Magnetic Field, *Science*, 334, 1690–1693
- Heyner, D., Glassmeier, K.-H., Schmitt, D., 2012, Stellar Wind Influence on Planetary Dynamos, *The Astrophysical Journal*, 750, 133
- Holzer, T. E., Axford, W. I., 1970, The Theory of Stellar Winds and Related Flows, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 8, 31–61
- Hori, K., Wicht, J., Christensen, U., 2010, The effect of thermal boundary conditions on dynamos driven by internal heating, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 182, 85–97
- Jackson, J. D., 2006, *Klassische Elektrodynamik*, de Gruyter
- Johnson, C. L., Purucker, M. E., Korth, H., Anderson, B. J., Winslow, R. M., Al Asad, M. M. H., Slavin, J. A., Alexeev, I. I., Phillips, R. J., Zuber, M. T., Solomon, S. C., 2012, MESSENGER observations of Mercury’s magnetic field structure, *Journal of Geophysical Research (Planets)*, 117, E00L14

- Jones, C., 2007, Thermal and compositional convection in the outer core, *Treatise on Geophysics*, 8, 131–185
- Kautzleben, H. u. G. F. H., 1965, *Kugelfunktionen*, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, erster Band, Ergänzungsband
- Knipp, D. J., Welliver, T., McHarg, M. G., Chun, F. K., Tobiska, W. K., Evans, D., 2005, Climatology of extreme upper atmospheric heating events, *Advances in Space Research*, 36, 2506–2510
- Korth, H., J. Anderson, B., Acuña, M. H., Slavin, J. A., Tsyganenko, N. A., Solomon, S. C., McNutt, R. L., 2004, Determination of the properties of Mercury's magnetic field by the MESSENGER mission, *Planetary and Space Science*, 52, 733–746
- Kristjánsson, J. E., Kristiansen, J., Kaas, E., 2004, Solar activity, cosmic rays, clouds and climate - an update, *Advances in Space Research*, 34, 407–415
- Kuang, W., Bloxham, J., 1997, An Earth-like numerical dynamo model, *Nature*, 389, 371–374
- Lai, D., Helling, C., van den Heuvel, E. P. J., 2010, Mass Transfer, Transiting Stream, and Magnetopause in Close-in Exoplanetary Systems with Applications to WASP-12, *The Astrophysical Journal*, 721, 923–928
- Lathuillere, C., Glangeaud, F., Zhao, Z. Y., 1986, Ionospheric ion heating by ULF Pc 5 magnetic pulsations, *Journal of Geophysical Research*, 91, 1619–1626
- Levy, E. H., 1979, Planetary dynamo amplification of ambient magnetic fields, in *Lunar and Planetary Science Conference*, (Hg.) N. W. Hinners, Bd. 10 von *Lunar and Planetary Science Conference*, S. 2335–2342
- Manglik, A., Wicht, J., Christensen, U. R., 2010, A dynamo model with double diffusive convection for mercury's core, *Earth and Planetary Science Letters*, 289, 619–628
- Margot, J. L., Peale, S. J., Jurgens, R. F., Slade, M. A., Holin, I. V., 2007, Large Longitude Libration of Mercury Reveals a Molten Core, *Science*, 316, 710–
- Matta, M., Smith, S., Baumgardner, J., Wilson, J., Martinis, C., Mendillo, M., 2009, The sodium tail of the Moon, *Icarus*, 204, 409–417
- Mauersberger, P., 1956, Das mittel der energiedichte des geomagnetischen hauptfeldes an der erdoberfläche und seine säkulare änderung, *Gerlands Beitr. Geophys.*, 65, 207–215
- Mauersberger, P. u. G. F. H., 1961, *Über das aus dem Erdinneren stammende Magnetfeld*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, dritter Band
- McClintock, W. E., Bradley, E. T., Vervack, R. J., Killen, R. M., Sprague, A. L., Izenberg, N. R., Solomon, S. C., 2008, Mercury's Exosphere: Observations During MESSENGER's First Mercury Flyby, *Science*, 321, 92–94

- Milillo, A., Wurz, P., Orsini, S., Delcourt, D., Kallio, E., Killen, R., Lammer, H., Massetti, S., Mura, A., Barabash, S., et al., 2005, Surface-exosphere-magnetosphere system of mercury, *Space Science Reviews*, 117, 397–443
- Morin, V., Dormy, E., 2009, The dynamo bifurcation in rotating spherical shells, *International Journal of Modern Physics B*, 23, 5467–5482
- Müller, J., Simon, S., Motschmann, U., Schüle, J., Glassmeier, K.-H., Pringle, G. J., 2011, Aikef: Adaptive hybrid model for space plasma simulations, *Computer Physics Communications*, 182, 946–966
- Müller, J., Simon, S., Wang, Y.-C., Motschmann, U., Heyner, D., Schüle, J., Ip, W.-H., Kleindienst, G., Pringle, G. J., 2012, Origin of Mercury’s double magnetopause: 3D hybrid simulation study with A.I.K.E.F., *Icarus*, 218, 666–687
- Mura, A., Wurz, P., Schneider, J., Lammer, H., Griebmeier, J.-M., Khodachenko, M. L., Weingrill, J., Guenther, E., Cabrera, J., Erikson, A., Fridlund, M., Milillo, A., Rauer, H., von Paris, P., 2011, Comet-like tail-formation of exospheres of hot rocky exoplanets: Possible implications for CoRoT-7b, *Icarus*, 211, 1–9
- Müller, J., 2012, A.I.K.E.F.: An Adaptive Hybrid Model with Application to Fossil Fields at Titan and Mercury’s Double Magnetopause, Dissertation, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig
- Ness, N. F., 1978, Mercury - Magnetic field and interior, *Space Science Reviews*, 21, 527–553
- Ness, N. F., Behannon, K. W., Lepping, R. P., Whang, Y. C., Schatten, K. H., 1974, Magnetic Field Observations near Mercury: Preliminary Results from Mariner 10, *Science*, 185, 151–160
- Ness, N. F., Behannon, K. W., Lepping, R. P., Whang, Y. C., 1975, The magnetic field of Mercury. I, *Journal of Geophysical Research*, 80, 2708–2716
- Ollivier, M., Roques, F., Casoli, F., Encrenaz, T., Selsis, F., 2009, *Planetary Systems*
- Olsen, N., Lühr, H., Sabaka, T. J., Manda, M., Rother, M., Tøffner-Clausen, L., Choi, S., 2006, CHAOS-a model of the Earth’s magnetic field derived from CHAMP, Ørsted, and SAC-C magnetic satellite data, *Geophysical Journal International*, 166, 67–75
- Olsen, N., Glassmeier, K.-H., Jia, X., 2010, Separation of the magnetic field into external and internal parts, *Space Science Reviews*, 152, 135–157
- Olson, P., Christensen, U. R., 2006, Dipole moment scaling for convection-driven planetary dynamos, *Earth and Planetary Science Letters*, 250, 561–571
- Parker, E. N., 1958, Dynamics of the Interplanetary Gas and Magnetic Fields., *Astrophys. J.*, 128, 664–672
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P., 1992, *Numerical recipes in C. The art of scientific computing*

- Prölss, G., 2003, Physik des erdnahen Weltraums: eine Einführung, Springer Verlag
- Richer, E., Modolo, R., Chanteur, G. M., Hess, S., Leblanc, F., 2012, A global hybrid model for Mercury's interaction with the solar wind: Case study of the dipole representation, *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, 117, A10228
- Rüdiger, G., Hollerbach, R., 2006, The magnetic universe, Wiley-VCH
- Russell, C. T., 2001, Solar Wind and Interplanetary Magnetic Field: A Tutorial, S. 73–89, AGU Geophysical Monograph 125
- Sakuraba, A., Kono, M., 2000, Effect of a uniform magnetic field on nonlinear magnetoconvection in a rotating fluid spherical shell, *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 92, 255–287
- Sakuraba, A., Roberts, P. H., 2009, Generation of a strong magnetic field using uniform heat flux at the surface of the core, *Nature Geoscience*, 2, 802–805
- Sarson, G. R., Jones, C. A., Zhang, K., Schubert, G., 1997, Magnetoconvection dynamos and the magnetic fields of Io and Ganymede., *Science*, 276, 1106–1108
- Sarson, G. R., Jones, C. A., Zhang, K., 1999, Dynamo action in a uniform ambient field, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 111, 47–68
- Schmidt, A., 1895, Mitteilungen über eine neue Berechnung des erdmagnetischen Potentials: Aus d. Abh. d. k. Akad. d. W. II. Cl. XIX. Bd. 1. Abth, Akademie
- Schmitt, D., Schüssler, M., 1989, Non-linear dynamos. I - One-dimensional model of a thin layer dynamo, *Astronomy & Astrophysics*, 223, 343–351
- Schubert, G., 2007, Core Dynamics, Bd. 8 von Treatise on Geophysics, Elsevier
- Schubert, G., Soderlund, K., 2011, Planetary magnetic fields: Observations and models, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 187, 92–108
- Shore, S. N., 2007, Astrophysical Hydrodynamics: An Introduction, Physics textbook, Wiley
- Shue, J.-H., Song, P., Russell, C., Steinberg, J., Chao, J., Zastenker, G., Vaisberg, O., Kokubun, S., Singer, H., Detman, T., et al., 1998, Magnetopause location under extreme solar wind conditions, *Journal of Geophysical Research: Space Physics (1978–2012)*, 103, 17 691–17 700
- Sinnhuber, M., Burrows, J. P., Chipperfield, M. P., Jackman, C. H., Kallenrode, M.-B., Künzi, K. F., Quack, M., 2003, A model study of the impact of magnetic field structure on atmospheric composition during solar proton events, *Geophysical Research Letters*, 30, 1818
- Slavin, J. A., Anderson, B. J., Baker, D. N., Benna, M., Boardsen, S. A., Gold, R. E., Ho, G. C., Imber, S. M., Korth, H., Krimigis, S. M., et al., 2012, Messenger and mariner 10 flyby observations of magnetotail structure and dynamics at mercury, *Journal of Geophysical Research: Space Physics (1978–2012)*, 117

- Smith, D. E., Zuber, M. T., Phillips, R. J., Solomon, S. C., Hauck, S. A., Lemoine, F. G., Mazarico, E., Neumann, G. A., Peale, S. J., Margot, J.-L., Johnson, C. L., Torrence, M. H., Perry, M. E., Rowlands, D. D., Goossens, S., Head, J. W., Taylor, A. H., 2012, Gravity Field and Internal Structure of Mercury from MESSENGER, *Science*, 336, 214–217
- Solomon, S. C., 1976, Some aspects of core formation in mercury, *Icarus*, 28, 509–521
- Solomon, S. C., McNutt, R. L., Gold, R. E., Domingue, D. L., 2007, MESSENGER Mission Overview, *Space Science Reviews*, 131, 3–39
- Spiegel, E. A., Veronis, G., 1960, On the Boussinesq Approximation for a Compressible Fluid., *The Astrophysical Journal*, 131, 442–447
- Spohn, T., Sohl, F., Wiczerkowski, K., Conzelmann, V., 2001, The interior structure of mercury: What we know, what we expect from bepicolombo, *Planetary and Space Science*, 49, 1561–1570
- Stadelmann, A., Vogt, J., Glassmeier, K.-H., Kallenrode, M.-B., Voigt, G.-H., 2010, Cosmic ray and solar energetic particle flux in paleomagnetospheres, *Earth, Planets, and Space*, 62, 333–345
- Stadelmann, J., 2012, Diffusion der Säkularvariation durch den lateral inhomogenen Erdmantel, Dissertation, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig
- Stanley, S., Bloxham, J., Hutchison, W. E., Zuber, M. T., 2005, Thin shell dynamo models consistent with mercury's weak observed magnetic field, *Earth and Planetary Science Letters*, 234, 27–38
- Stanley, S., Zuber, M., Bloxham, J., 2007, Using reversed magnetic flux spots to determine a planet's inner core size, *Geophysical Research Letters*, 34
- Steenbeck, M., Krause, F., Rädler, K.-H., 1966, Berechnung der mittleren lorentzfeldstärke $v \times b$ für ein elektrisch leitendes medium in turbulenter, durch coriolis-kräfte beeinflusster bewegung, *Zeitschrift Naturforschung Teil A*, 21, 369
- Svensmark, H., 2006, Cosmic rays and the biosphere over 4 billion years, *Astron. Nachr.*, 327, 871
- Takahashi, F., Matsushima, M., 2006, Dipolar and non-dipolar dynamos in a thin shell geometry with implications for the magnetic field of mercury, *Geophysical research letters*, 33
- Tarduno, J. A., Cottrell, R. D., Watkeys, M. K., Hofmann, A., Doubrovine, P. V., Mamer, E. E., Liu, D., Sibeck, D. G., Neukirch, L. P., Usui, Y., 2010, Geodynamo, Solar Wind, and Magnetopause 3.4 to 3.45 Billion Years Ago, *Science*, 327, 1238–1240
- Tilgner, A., 2005, Precession driven dynamos, *Physics of Fluids*, 17, 034 104
- Tsyganenko, N. A., 1995, Modeling the Earth's magnetospheric magnetic field confined within a realistic magnetopause, *J. Geophys. Res.*, 100, 5599–5612

- Tsyganenko, N. A., 1996, Effects of the solar wind conditions in the global magnetospheric configurations as deduced from data-based field models, in International Conference on Substorms, (Hg.) E. J. Rolfe, B. Kaldeich, Bd. 389 von ESA Special Publication, S. 181
- Tsyganenko, N. A., Sitnov, M. I., 2005, Modeling the dynamics of the inner magnetosphere during strong geomagnetic storms, *J. Geophys. Res.*, 110, A3208
- Uno, H., Johnson, C. L., Anderson, B. J., Korth, H., Solomon, S. C., 2009, Modeling mercury's internal magnetic field with smooth inversions, *Earth and Planetary Science Letters*, 285, 328–339
- Veasey, M., Dumberry, M., 2011, The influence of mercury's inner core on its physical libration, *Icarus*, 214, 265–274
- Vidotto, A. A., Jardine, M., Helling, C., 2010, Early UV Ingress in WASP-12b: Measuring Planetary Magnetic Fields, *The Astrophysical Journal, Letters to the Editor*, 722, L168–L172
- Vilim, R., Stanley, S., Hauck, S., 2010, Iron snow zones as a mechanism for generating mercury's weak observed magnetic field, *Journal of Geophysical Research: Planets* (1991–2012), 115
- Vogt, J., Glassmeier, K.-H., 2001, Modelling the paleomagnetosphere: strategy and first results, *Advances in Space Research*, 28, 863–868
- Wicht, J., 2002, Inner-core conductivity in numerical dynamo simulations, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 132, 281–302
- Wicht, J., Tilgner, A., 2010, Theory and modeling of planetary dynamos, *Space science reviews*, 152, 501–542
- Wicht, J., Manda, M., Takahashi, F., Christensen, U. R., Matsushima, M., Langlais, B., 2007, The Origin of Mercury's Internal Magnetic Field, *Space Science Reviews*, 132, 261–290
- Wiehle, S., Plaschke, F., Motschmann, U., Glassmeier, K.-H., Auster, H. U., Angelopoulos, V., Mueller, J., Kriegel, H., Georgescu, E., Halekas, J., Sibeck, D. G., McFadden, J. P., 2011, First lunar wake passage of ARTEMIS: Discrimination of wake effects and solar wind fluctuations by 3D hybrid simulations, *Planetary and Space Science*, 59, 661–671
- Williams, J.-P., Aharonson, O., Nimmo, F., 2007, Powering mercury's dynamo, *Geophysical Research Letters*, 34
- Willis, D. M., Holder, A. C., Davis, C. J., 2000, Possible configurations of the magnetic field in the outer magnetosphere during geomagnetic polarity reversals., *Annales de Geophysique*, 18, 11–27

- Winslow, R. M., Anderson, B. J., Johnson, C. L., Slavin, J. A., Korth, H., Purucker, M. E., Baker, D. N., Solomon, S. C., 2013, Mercury's magnetopause and bow shock from messenger magnetometer observations, *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, im Druck
- Wolf-Gladrow, D., Ebel, A., Neubauer, F., Raschke, E., Speth, P., 1987, An introduction to poloidal and toroidal fields, *Mitteilungen aus dem Institut für Geophysik und Meteorologie der Universität zu Köln*, Heft 54
- Wood, B. E., 2006, The Solar Wind and the Sun in the Past, *Space Science Reviews*, 126, 3–14
- Wood, B. E., Müller, H., Zank, G. P., Linsky, J. L., 2002, Measured Mass-Loss Rates of Solar-like Stars as a Function of Age and Activity, *The Astrophysical Journal*, 574, 412–425
- Wood, B. E., Müller, H., Zank, G. P., Linsky, J. L., Redfield, S., 2005, New Mass-Loss Measurements from Astrospheric Ly α Absorption, *The Astrophysical Journal Letters*, 628, L143–L146
- Zarka, P., 2007, Plasma interactions of exoplanets with their parent star and associated radio emissions, *Planetary and Space Science*, 55, 598–617
- Zhang, K., 2007, *Encyclopedia of geomagnetism and paleomagnetism*, Kap. Equilibration of Magnetic Field, Weak- and Strong-Field Dynamos, S. 262–263, Springer
- Zhou, X. W., Russell, C. T., Le, G., Fuselier, S. A., Scudder, J. D., 2000, Solar wind control of the polar cusp at high altitude, *Journal of Geophysical Research*, 105, 245–252

Danksagung

Ich bedanke mich herzlich bei Prof. Karl-Heinz Glaßmeier für die umfangreiche Betreuung und Begleitung dieser Arbeit. Er hat stets Rat gewusst bei nicht nur fachlich schwierigen Situationen, die bei der Etablierung eines neuen Forschungsgebietes auftreten. Meiner Freundin Maxi kann ich gar nicht genug danken. Du hast mir liebevollen Rückhalt gegeben und mich immer unterstützt. Ohne Dich wäre ich nicht soweit gekommen und ich hoffe, wir können noch sehr lang gemeinsam unseren Weg gehen. Ich danke meiner Familie, dass sie mir mein Studium ermöglicht und mein Interesse in die Naturwissenschaften geweckt haben. Ich weiß, dass ich immer auf sie zählen kann. Dr. Dieter Schmitt möchte ich für die Unterstützung bei den kinematischen Dynamomodellen und den Rat zu verschiedensten Themen danken. Ich konnte von seiner großen Expertise in der Dynamotheorie profitieren. Ich danke Dr. Johannes Wicht und Prof. Ulrich Christensen für umfangreiche wissenschaftliche Diskussion, für das zur Verfügung gestellte Simulationsprogramm MAGIC, der Hilfe bei den ersten Schritten der Modellbildung und den zur Verfügung gestellten numerischen Ressourcen. I want to express my gratitude towards Natalia Gomez-Perez for illuminating discussions and her advice in running MAGIC. Prof. Uwe Motschmann und Joachim Müller möchte ich für die umfangreichen wissenschaftlichen Diskussionen danken und dafür, dass ich den A.I.K.E.F.-Code benutzen durfte. Dr. Haje Korth möchte ich für die Diskussionen über das Tsyganenko-Modell und die erste gemeinsame Implementierung des parabolischen Magnetosphärenmodells danken. Kai Okrafka gebührt mein Dank für seine Hilfe bei den schwierigen Computer- und Linuxproblemen, die ich zwischenzeitlich hatte. Mein Dank geht auch an Lars Guicking, Bastian Gundlach, Christoph Koenders, Evelyn Liebert, Christian Nabert, Christopher Perschke und Matthias Petzke, die diese Arbeit auf Ungereimtheiten in der Formulierung und Rechtschreibfehler durchgesehen haben. Den Kolleginnen und Kollegen des Instituts möchte ich für die schöne Atmosphäre danken, welche die Arbeit um einiges leichter macht. Unzählige Grillabende, Volleyballabende, Kickerspiele, Kaffeepausen und einige gemeinsame Winterurlaube haben mir wirklich sehr viel Freude bereitet.

Curriculum Vitae

Persönliche Daten

Name: Daniel Heyner
Anschrift: Kastanienallee 34
38104 Braunschweig
Geburtstag: 29.01.1982
Geburtsort: Wolfsburg
Staatsangehörigkeit: deutsch

Schulbildung

1994 - 2001 Albert-Schweitzer-Gymnasium, Wolfsburg, Abitur
1998 - 1999 Washington Highschool, Vinton, Iowa, USA

Studium

2002 - 2004 Intensivstudiengang Physik, Technische Universität Braunschweig, Vordiplom
2004 - 2008 Studiengang Physik, Technische Universität Braunschweig, Diplomarbeit zum Thema: Magnetfeldmessungen am Merkur: Einfluss Externer Stromsysteme, unter der Betreuung von Prof. Dr. Karl-Heinz Glaßmeier und Prof. Dr. Uwe Motschmann

Promotion

2008-2013 Promotionsstudium an der Technischen Universität Braunschweig, im Rahmen des Promotionsprogramms der International Max Planck Research School on Physical Processes in the Solar System and Beyond (Solar System School), Thema der Dissertation: Das Magnetfeld des Merkur: Über den Einfluss der Magnetosphäre auf den Dynamo im Planeteninneren, unter der Betreuung von Prof. Dr. Karl-Heinz Glaßmeier und PD Dr. Dieter Schmitt

Publikationen

Heyner, D., Schmitt, D., Wicht, J., Glassmeier, K.-H., Korth, H., Motschmann, U., 2010, The initial temporal evolution of a feedback dynamo for Mercury, *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 104, 419–429

Heyner, D., Schmitt, D., Glassmeier, K.-H., Wicht, J., 2011a, Dynamo action in an ambient field, *Astronomische Nachrichten*, 332, 36–42

Heyner, D., Wicht, J., Gomez-Perez, N., Schmitt, D., Auster, H. U., Glassmeier, K. H., 2011b, Evidence from Numerical Experiments for a Feedback Dynamo Generating Mercury's Magnetic Field, *Science*, 334, 1690–1693

Heyner, D., Glassmeier, K.-H., Schmitt, D., 2012, Stellar Wind Influence on Planetary Dynamos, *The Astrophysical Journal*, 750, 133